Učitel matematiky

Naďa Stehlíková

O jedné zajímavé knize z elementární teorie čísel (1)

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 3, 167–171

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150947`

O JEDNÉ ZAJÍMAVÉ KNIZE Z ELEMENTÁRNÍ TEORIE ČÍSEL (1)

NAĎA STEHLÍKOVÁ

Již v roce 1973 byla v nakladatelství Scott, Foresman and Company vydána kniha *Problem Solving in Mathematics* (Řešení úloh v matematice) s podtitulem *Elementary Number Theory and Arithmetic* (Elementární teorie čísel a aritmetika) autora Thomase Buttse. Přestože se tak stalo v době, kdy se o konstruktivismu ve výuce matematiky ještě nemluvilo, je tato kniha napsána způsobem, který podle našeho názoru principy konstruktivismu[16] naplňuje. Autor si dobře uvědomuje, že poznatky jsou nepřenosné, že jde o individuální konstrukty, které si vytváří každý jedinec sám na základě svých zkušeností. O tom svědčí i citát z předmluvy knihy.

> *Většina úloh z učebnic ... jsou buď úlohy na užití dovednosti, či úlohy typu „dokažte, že“. Oba typy úloh sice mají své místo, avšak ignorují tvořivou stránku matematiky.*
>
> *Cílem této knihy je tedy umožnit studentům, aby zažili radost z řešení úloh již v počátcích svého studia matematiky.*

Autor se snaží vytvářet pro studenty podnětné formulace úloh, které je mají povzbuzovat k myšlení a hledání vlastních nápadů. Vždyť co jsme sami objevili, zanechá nesmazatelnou stopu na našem vědomí a budeme to moci později lépe využít.

Kniha je dle autora určena prvním ročníkům budoucích učitelů matematiky na základní i střední škole jako úvod do matematického způsobu uvažování. Podle našeho názoru mohou být některé kapitoly s úspěchem zařazeny i na střední škole.

Článek vznikl v rámci řešení grantu GAUK 302/1998/A PP/PedF.

[16] O konstruktivismu se lze dočíst např. v článku Hejný M., Kuřina F.: *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice.* Matematika – fyzika – informatika, **7**(1997/98), str. 385 – 395, či Cachová J. *Konstruktivní přístupy k vyučování a „Investigating teaching“ B. Jaworské.* Matematika – fyzika – informatika, **8**(1998/99), str. 77 – 82.

Kniha obsahuje tyto kapitoly: Dělitelnost, Prvočísla, Rozklad na součin prvočísel, Číslice, Kritéria dělitelnosti, Dělení se zbytkem, Největší společný dělitel, Nejmenší společný násobek, Počet dělitelů, Dokonalá čísla, Figurální čísla, Magické čtverce, Racionální čísla, Iracionální čísla, Pravděpodobnost, Geometrické úlohy, Některé slavné (nevyřešené) úlohy teorie čísel.

Na začátku většiny kapitol jsou stručně vysvětleny základní pojmy doložené ukázkami (od čtenáře se nevyžadují téměř žádné znalosti pojmů teorie čísel kromě pojmů základní školy). Pak následují samotné úlohy. Jsou pečlivě *gradovány* a voleny tak, aby v průběhu řešení student sám *odhalil* nějaký pojem či větu z teorie čísel. U těch úloh, které autor považuje za klíčové pro pochopení pojmů, jsou *Hints and Comments* (Nápovědy a komentáře). Např. tam, kde se student poprvé setkává s tím, že má prokázat platnost něčeho či něco vyvrátit, autor podrobně rozebírá problematiku důkazu či protipříkladu. Nápovědy však nikdy neobsahují celá řešení.

Kniha vede čtenáře k *systematickému přístupu* k řešení úloh. Jsou v ní zařazeny celkem čtyři vstupy autora na téma *Reflections on Problem Solving* (Úvahy nad řešením úloh). V nich podává obšírný výklad obecného přístupu k řešení matematických úloh vyžadujících experimentování, vytváření hypotézy a posléze její vyvrácení či důkaz platnosti. Studenti jsou vedeni k tomu, aby si nejprve udělali tolik číselných příkladů, kolik potřebují na to, aby formulovali obecnou hypotézu. V posledním vstupu autor rozebírá některé základní chyby, kterých se studenti při řešení úloh dopouštějí. Často je vyzývá, aby se zastavili a přemýšleli o tom, v čem bylo jádro právě vyřešené úlohy a co se při jejím řešení naučili z hlediska matematiky i z hlediska své schopnosti řešit úlohy.

Na konci knihy je zařazena kapitola *Problem Solving from the Teacher's Point of View* (Řešení úloh z hlediska učitele), v níž se věnuje třem otázkám: proč by se řešení úloh mělo zařazovat do výuky (rozvoj schopnosti samostatného myšlení, zájmu o předmět, schopnosti objevit zákonitosti, vytvářet hypotézy, dokazovat a vyvracet je; jsou ukázkou, že matematika je stále živý předmět (existence nevyřešených úloh), apod.), jaká je role učitele ve výuce založené na řešení úloh (vyvolat zvědavost žáků, poskytnout jim pomoc v řešení, ale jen do vhodné míry (určitá míra frustrace studenta může být přínosná), poskytovat studentům zpětnou vazbu, rozebírat s nimi chyby apod.), rady pro využití řešení úloh ve třídě (řešení úloh ve skupině, „úlohy týdne", soutěže apod.).

Uveďme nyní ukázky úloh z některých kapitol, které ilustrují výše uvedenou charakteristiku knihy.

Ukázky úloh

Poznámka: Nadále „číslo" znamená „kladné celé číslo". V originále autor pod pojmem „integer" míní „positive integer".

1. Dělitelnost

Tato kapitola je pěknou ukázkou, jak autor mění tradiční přístup zadávání úloh „Dokažte, že platí ..." na více motivující zadání „Zjistěte, zda platí ...", které v sobě obsahuje výzvu k objevování. Za přínosné též považujeme, že jsou zařazena i tvrzení, která jsou nepravdivá. Ta jsou často zdrojem mnoha důležitých informací.

Po sérii číselných příkladů následují obecnější úlohy, které jsou v podstatě ukázkami dobře známých tvrzení z elementární teorie čísel.

Poznámka: Symbol $a \mid b$ znamená „číslo a dělí číslo b".

Problem 1. Let $P_3 = \{1 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 4, 3 \cdot 4 \cdot 5, 4 \cdot 5 \cdot 6, \ldots\}$. In words, P_3 is the set of all integers which are products of three consecutive integers. What is the largest integer which is a factor of *every* integer in P_3? Explain your reasoning. Now answer the same question for P_4, P_5, P_2, explaining your reasoning in each case. In general, what is the largest integer which is a factor of every integer in P_n?

Problem 2. For what (type of) integers n is $4 \mid (n^2 - n)$? Justify your answer.

Problem 3. You know that $2 \mid 6$, $6 \mid 24$ a $2 \mid 24$. Is this fact always true, i.e. if $a \mid b$ and $b \mid c$, is $a \mid c$? Likewise, $2 \mid 6$, $2 \mid 24$, and $2 \mid (6 + 24)$. Is this fact always true, i.e. if $a \mid b$ and $a \mid c$, is $a \mid (b + c)$? Justify your answer.

Problem 4. Determine whether each of the following statements is true or false. For those which are true, construct a proof; for those which are false, find a counterexample.

(a) If $a \nmid b$ and $b \nmid c$, then $a \nmid c$.
(b) If $a \nmid b$ and $a \nmid c$, then $a \nmid (b + c)$.
(c) If $a \mid b$ and $c \mid d$, then $ac \mid bd$.
(d) If $a \mid c$ a $b \mid c$, then $ab \mid c$.
(e) If $a \mid b$, then $a^2 \mid b^2$.

Problem 5. If $a \mid b$ and $b \mid a$, what can you conclude about a and b? Justify your answer.

Problem 6. Consider the first n integers $1, 2, 3, \ldots, n$. Rearrange them in any way you want, listing them as $a_1, a_2, \ldots, a_n$. (For example, 5, 3, 4, 1, 2 is a rearrangement of 1, 2, 3, 4, 5 and in our notation $a_1 = 5$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 1$, and $a_5 = 2$). Form the product $P = (a_1 - 1)(a_2 - 2)\ldots(a_n - n)$. [The product P may be a negative integer or zero.] In the example above $P = (5 - 1)(3 - - 2)(4 - 3)(1 - 4)(2 - 5) = 36$.

Show that if n is odd, P is even. (That is, as long as n is odd, no matter how the integers $1, 2, 3, \ldots$ are rearranged, the product P is even!) By convention, 0 is considered an even integer.

★ ★ ★

Úloha 1. Nechť $P_3 = \{1\cdot 2\cdot 3, 2\cdot 3\cdot 4, 3\cdot 4\cdot 5, 4\cdot 5\cdot 6, \ldots\}$. Slovy, P_3 je množina všech čísel, která jsou součinem tří po sobě jdoucích čísel. Jaké největší číslo je dělitelem každého čísla v P_3? Svou úvahu vysvětlete. Nyní zodpovězte stejnou otázku pro P_4, P_5, P_2 a svou úvahu vždy vysvětlete. Obecně, jaké je největší číslo, které je dělitelem každého čísla v P_n?

Úloha 2. Pro jaká čísla (jaký typ čísel) n platí $4 \mid (n^2 - n)$? Svou odpověď zdůvodněte.

Úloha 3. Víte, že $2 \mid 6$, $6 \mid 24$ a $2 \mid 24$. Platí to vždycky, tj. jestliže $a \mid b$ a $b \mid c$, je i $a \mid c$? Podobně, $2 \mid 6$, $2 \mid 24$ a $2 \mid (6+24)$. Platí to vždy, tj. jestliže $a \mid b$ a $a \mid c$, je $a \mid (b+c)$? Svou odpověď zdůvodněte.

Úloha 4. Zjistěte, zda jsou následující tvrzení pravdivá nebo nepravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, u nepravdivých najděte protipříklad.

(a) Jestliže $a \nmid b$ a $b \nmid c$, pak $a \nmid c$.
(b) Jestliže $a \nmid b$ a $a \nmid c$, pak $a \nmid (b+c)$.
(c) Jestliže $a \mid b$ a $c \mid d$, pak $ac \mid bd$.
(d) Jestliže $a \mid c$ a $b \mid c$, pak $ab \mid c$.
(e) Jestliže $a \mid b$, pak $a^2 \mid b^2$.

Úloha 5. Jestliže $a \mid b$ a $b \mid a$, co můžete říci o a a b? Svou odpověď zdůvodněte.

Úloha 6. Uvažujte prvních n čísel $1, 2, 3, \ldots, n$. Uspořádejte je libovolným způsobem a označte je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (například 5, 3, 4, 1, 2 je uspořádání čísel 1, 2, 3, 4, 5 a v našem zápise $a_1 = 5$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 1$ a $a_5 = 2$). Vytvořte součin

$$P = (a_1 - 1)(a_2 - 2)\ldots(a_n - n).$$

[Součin P může být i záporné celé číslo nebo nula.] V našem případě

$$P = (5-1)(3-2)(4-3)(1-4)(2-5) = 36.$$

Ukažte, že pokud je n liché, P je sudé (tedy pokud je n liché, P je sudé, ať jsou čísla $1, 2, 3, \ldots, n$ uspořádána jakkoli!). Nulu považujeme za sudé číslo.

Pokračování příště.