ŠKOLNÍ MATEMATICKÉ ÚLOHY STARÉ 1200 LET (3)

KAREL MAČÁK

6. Historický komentář k „diofantovským" úlohám

Alkuinovy úlohy vedoucí na soustavu dvou diofantovských rovnic o třech neznámých (viz minulé pokračování) mají dlouhou historii, kterou budeme v dnešním pokračování ilustrovat na příkladech z různých časových období a zeměpisných oblastí. I když budeme stále mluvit o diofantovských rovnicích, vůbec zde nebude řeč o Diofantovi z Alexandrie (okolo r. 250 n.l.), a to ze dvou důvodů:

a) Prvním je důvod historický: v Alkuinově době nebyly Diofantovy spisy v Evropě známy ([3], str. 293) a Alkuin tedy nemohl být Diofantem ovlivněn.

b) Druhým je důvod matematický: Alkuinovy úlohy představují „prakticky" motivované slovní úlohy vedoucí na soustavu lineárních diofantovských rovnic, která má být řešena v oboru celých kladných čísel; takové úlohy však v Diofantových spisech vůbec nejsou studovány (viz např. [13], str. 195 a násl.). „Praktická" slovní úloha se u Diofanta vyskytuje jen jedna, lineárními rovnicemi se nezabýval vůbec a pokud se dnes občas objevuje tvrzení, že Diofantos hledal řešení rovnic v oboru celých čísel (např. [9], str. 200, [11], str. 29), pak toto tvrzení není historicky podložené, protože Diofantos hledal řešení rovnic v oboru racionálních nezáporných čísel.

Lze tedy říci, že Alkuinova sbírka nemá s historickým Diofantem nic společného, a proto Diofanta ponecháme stranou.

6.1 Čínská matematika

Čínská matematika Alkuina určitě přímo neovlivnila, představuje však nejstarší zdroj úloh onoho typu, kterým se Alkuin zabýval. Poměrně podrobný výklad o čínské matematice (takřka 80 stránek) lze najít např. v [14] a z tohoto výkladu zde budeme vycházet.

Úlohy vedoucí na diofantovské rovnice se objevují již v základním spisu staré čínské matematiky, který je nazýván *Matematika v devíti knihách*; tento spis shrnuje výsledky dosažené čínskými matematiky v prvním tisíciletí před n.l. Údajně byl sepsán v r. 152 př.n.l., nejstarší dochovaná edice však pochází až z r. 263 n.l. Z hlediska Alkuinovy sbírky je však zajímavá až tzv. „úloha o drůbeži", která vznikla pravděpodobně na konci druhého století n.l.[6] ([14], str. 81):

ÚLOHA O DRŮBEŽI

Kolik je možné za sto mincí koupit kohoutů, slepic a kuřat, je-li jich dohromady sto a stojí-li kohout pět mincí, slepice čtyři mince a čtyři kuřata dohromady jednu minci ?

Označíme-li k počet kohoutů, s počet slepic a r počet kuřat, pak úloha vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} k + s + r &= 100\ , \\ 5k + 4s + \frac{r}{4} &= 100\ . \end{aligned}$$

Čen Luan uvádí řešení $k = 15$, $s = 1$ a $r = 81$; analogicky jako Alkuin neuvažuje řešení $k = 0$, $s = 20$ a $r = 80$. Uvádí i další variantu této úlohy, při které kohout stojí čtyři mince, slepice stojí tři mince a tři kuřata jsou za jednu minci; u této varianty uvádí pouze řešení $k = 8$, $s = 14$, $r = 78$, i když existuje další řešení neobsahující nulu $k = 16$, $s = 3$ a $r = 81$ (a navíc řešení $k = 0$, $s = 25$, $r = 75$).

Podobnost s Alkuinem je očividná. Je ovšem třeba uvést, že čínští matematici došli dále, protože jiný čínský matematik Čang Čchiou-ťien, žijící pravděpodobně rovněž ve druhé polovině 6. století, uvádí další variantu této úlohy, při které kohout stojí pět

[6] Někdy se taky nazývá úlohou o ptácích. Nejstarší dochované záznamy o této úloze však pocházejí až z druhé poloviny 6. století od Čen Luana ([14], str. 81).

mincí, slepice tři mince a tři kuřata jednu minci, a uvádí všechna řešení neobsahující nulu:

$$\begin{array}{rcccc} k & = & 4, & 8, & 12; \\ s & = & 18, & 11, & 4; \\ r & = & 78, & 81, & 84; \end{array}$$

navíc existuje ještě řešení $k = 0$, $s = 25$, $r = 75$.

Úloha o drůbeži vznikla v Číně, odtud pronikla do Indie a dále k Arabům. Arabskou matematikou mohl být Alkuin ovlivněn a proto se nyní budeme věnovat jednomu spisu arabskému.

6.2 Arabská matematika[7]

Nejprve krátce připomeňme některá základní historická fakta týkající se kontaktů mezi Araby a franckou říší. Jak už bylo řečeno na začátku, Alkuin působil na dvoře Karla Velikého, který panoval ve francké říši v letech 768 - 814. V té době Arabové ovládali celé severní pobřeží Afriky a takřka celý Pyrenejský poloostrov, takže byli sousedy Franků. V dalekém Bagdádu panoval v letech 786 - 809 chalífá Hárún ar-Rašíd (známý z *Pohádek tisíce a jedné noci*), který byl v diplomatických kontaktech s Karlem Velikým ([2], str. 278, [14], str. 179). Alkuin tedy mohl mít nějaké informace o arabské matematice; tomu by nasvědčoval i výskyt velblouda v zadání úlohy č. 39 (viz minulé pokračování tohoto článku)[8]. Budeme se teď proto chvíli věnovat jednomu arabskému spisu obsahujícímu úlohy vedoucí na soustavy diofantovských rovnic.

Tímto spisem je *Kniha aritmetických kuriozit*, jejímž autorem je Abú Kámil[9] žijící přibližně v letech 850 - 930. Uvedený spis tedy nemohl přímo ovlivnit Alkuina, který žil dříve, ale Abú Kámil

[7]Pokud se historie arabské matematiky týče, je jí věnováno takřka 150 stran v knize [14].

[8]M. Folkerts ovšem upozorňuje na to ([1], poznámka 113 na str. 33), že velbloudi (často společně s osly a ovcemi) se vyskytují i v textu Starého zákona, který Alkuin jistě dobře znal, takže z výskytu velblouda v úloze č. 39 nelze dělat žádné ukvapené závěry.

[9]Podle [14], str. 218 bylo jeho plné jméno Abú Kámil Šudžá ibn Aslam Ibn Muhammad al-Hásib al-Misrí.

zahajuje svůj spis konstatováním, že pouze řeší úlohy, které jsou všeobecně známy; je tedy možné, že nějaké poznatky o tomto typu úloh mohly z arabského světa proniknout už dříve i k Alkuinovi.

Abú Kámilův spis představuje vlastně sbírku šesti řešených úloh motivovaných prodejem různých ptáků sloužících zřejmě k jídlu[10]; všechny úlohy vedou na řešení soustavy dvou diofantovských rovnic o třech až šesti neznámých a Abú Kámil vždy uvádí všechna řešení, neuvažuje však řešení obsahující nulu. Příslušné soustavy pro čtyři z těchto šesti úloh jsou uvedeny v knize [14] na str. 231 - 232; jedná se o Abú Kámilovy úlohy č. 1 (má jedno řešení), č. 2 (má šest řešení), č. 5 (nemá celočíselné řešení !) a č. 6 (má 2676 řešení a Abú Kámil na ni zřejmě byl obzvlášť hrdý, protože na ni hned v úvodu svého spisu dvakrát upozorňuje). Uveďme zde proto na ukázku třetí úlohu, která v [14] není uvedena; vycházíme přitom z německého překladu Abú Kámilovy sbírky [15].

ÚLOHA O PTÁCÍCH

Jak budeš počítat, když dostaneš sto drachem a je ti řečeno: kup za to sto ptáků čtyř druhů, totiž kachny, vrabce, holuby a kuřata, kachnu za čtyři drachmy, deset vrabců za jednu drachmu, dva holuby za jednu drachmu a kuře za jednu drachmu ?

Označíme-li k = počet kachen, v = počet vrabců, h = počet holubů a r = počet kuřat, pak úloha vede na soustavu rovnic

$$k + v + h + r = 100 ,$$

$$4k + \frac{v}{10} + \frac{h}{2} + r = 100 .$$

Odečteme-li první rovnici od druhé, dostaneme

$$3k - \frac{9}{10}v - \frac{h}{2} = 0 ,$$

z čehož plyne

$$k = \frac{3}{10}v + \frac{h}{6} .$$

[10] Prodávají se kuřata, kachny, holubi, holubi hřívnáči, skřivani a vrabci.

Řešení úlohy tedy jistě nalezneme, bude-li počet vrabců dělitelný deseti a současně počet holubů dělitelný šesti, z čehož dostává Abú Kámil výchozí řešení $v = 10$, $h = 6$, $k = 4$ a $r = 80$. Dál pokračuje takto: klade postupně $h = 6, 12, \dots, 66$ a při pevném h dosazuje postupně $v = 10, 20, \dots$. Pro dané h a v tak nalézá všechny možné hodnoty k (které se postupně zvyšují) a r (které postupně klesají); dosazování končí ve chvíli, kdy by počet kuřat $r \leq 0$. Tímto postupem najde 44 řešení, při kterých jsou počty všech ptáků kladné.

Řešení úlohy však také nalezneme, bude-li počet vrabců dělitelný pěti a současně počet holubů dělitelný třemi, z čehož dostává Abú Kámil výchozí řešení $v = 5$, $h = 3$, $k = 2$ a $r = 90$. Analogickým postupem jako v předešlém případě najde 54 řešení, při kterých jsou počty všech ptáků kladné, takže celkem dospívá k 98 řešením dané úlohy[11].

Poznamenejme ještě, že ve čtvrté úloze, která rovněž není uvedena v [14], řeší Abú Kámil podobnou soustavu dvou rovnic o čtyřech neznámých, která má 304 řešení. Z uvedených faktů je zřejmé, že úlohy řešené arabskými matematiky byly daleko obtížnější než úlohy Alkuinovy a Arabové při jejich řešení došli dále než Alkuin, protože uměli najít všechna řešení.

6.3 České úlohy

I když cílem tohoto článku není sledování historie úloh vedoucích na diofantovské rovnice, přece jen považujeme za vhodné poznamenat, že nejednu takovou úlohu lze najít i ve starých českých učebnicích. Zájemci o tuto problematiku mohou nahlédnout například do skript [16], ze kterých zde ocitujeme jednu úlohu.

Úloha pochází z nejstarší české učebnice, která vyšla v r. 1530 v Norimberku. Jejím autorem byl Ondřej Klatovský a její název byl ([16], str. 31)

„Nowé knijžky wo počtech na cyfry a na liny, při tom niekteré welmi užitečné regule a exempla mince rozličné, podle biehu kupeckého krátce a užitečnie sebraná skrze práce a náklad Wondřeje

---

[11] Přesně vzato, Abú Kámil dvě řešení přehlédl; podle něj má úloha 96 řešení, ale v použitém německém překladu je na tuto chybu upozorněno.

Klatowského".

Příklad, který nás zajímá, je následující ([16], str. 44):

ÚLOHA O KVASU[12]

26 osob na jednom kvasu propilo 88 penízů bílých. Při tom kvase byli muži, ženy a panny; z mužů jedna osoba dáti měla 6 penízů, z žen 4 penízy a z panen jedna 2 penízy. Otázka: kolik jest při tom cechu aneb kvasu mužů bylo, kolik žen, kolik panen ?

Označíme-li m = počet mužů, z = počet žen a p = počet panen, pak snadno zjistíme, že z příslušné soustavy dvou rovnic o třech neznámých lze získat rovnici

$$z = 18 - 2m ,$$

která vede k následující tabulce všech řešení úlohy:

$$\begin{array}{ccrrrrrrrrrr} m & = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9; \\ z & = & 18, & 16, & 14, & 12, & 10, & 8, & 6, & 4, & 2, & 0; \\ p & = & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17\,. \end{array}$$

Klatovský uvádí pouze řešení s 6 muži a s 8 muži.

6.4 Eulerova „Algebra"

Leonhard Euler (1707 - 1783) patří nesporně mezi nejvýznamnější postavy v dějinách matematiky. Považujeme proto za vhodné na závěr tohoto malého historického přehledu uvést, že do II. dílu své učebnice *Vollständige Anleitung zur Algebra*, která byla napsána v r. 1767, zařadil i kapitolu obsahující pět úloh vedoucích na nalezení celočíselného nezáporného řešení soustavy dvou diofantovských rovnic[13]. Uvedeme zde pouze první z těchto úloh, protože je nejjednodušší a navíc je velice podobná úloze Ondřeje Klatovského uvedené v předešlé části.

[12] V [16] nemá úloha žádný název, takže jsme byli nuceni název vymyslet.

[13] Vycházíme zde z anglického vydání [17], které je reprintem vydání z r. 1840. Je k němu připojena úvodní stať C. Truesdella z r. 1972, ve které se uvádí (str. XXXIII), že tato Eulerova učebnice je po Eukleidových *Základech* nejčtenější matematickou knihou v histori; odtud také přebíráme údaj o roku vzniku této Eulerovy knihy.

ÚLOHA O HOSPODĚ[14]

Třicet lidí, muži, ženy a děti, utratilo 50 korun v hospodě. Útrata muže jsou 3 koruny, útrata ženy je 2 koruny a dítěte 1 koruna. Kolik bylo mužů, žen a dětí?

Úloha je natolik podobná úloze Ondřeje Klatovského, že nepovažujeme za nutné podrobněji ji rozebírat. Analogicky jako u Klatovského vede k rovnici

$$z = 20 - 2m$$

a tabulka všech možných řešení u Eulera vypadá takto:

$$\begin{array}{llrrrrrrrrrrr} m & = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10; \\ z & = & 20, & 18, & 16, & 14, & 12, & 10, & 8, & 6, & 4, & 2, & 0; \\ d & = & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20\,. \end{array}$$

LITERATURA (POKRAČOVÁNÍ):

[13] Kolman, A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[14] Juškevič, A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977.

[15] *Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abú Kámil el-Misrí*, Übersetzt und mit Kommentar versehen von Heinrich Suter in Zürich. Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, 11. Band. Leipzig, 1910 - 1911.

[16] Šedivý, J. a kol., *Antologie matematických didaktických textů. Období 1360 - 1860*, Skripta MFF UK Praha, SPN, Praha, 1987.

[17] Euler, L., *Elements of Algebra*, Translated by J. Hewlett, Springer, New York etc., 1984. Jedná se o reprint překladu z r. 1840, ke kterému je připojena úvodní stať C. Truesdella.

Pokračování příště.

[14] V [17] nemá úloha žádný název, takže jsme byli nuceni název vymyslet.