Učitel matematiky

Helena Durnová

Čtyři kostky. Hlavolam nejen pro dlouhé zimní večery

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 2, 109–115

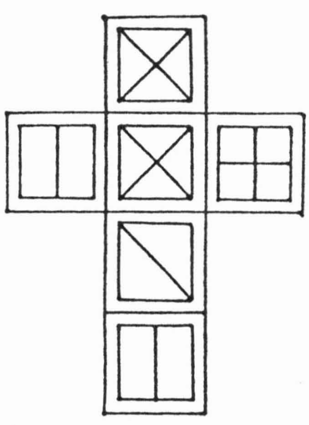
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150934`

ČTYŘI KOSTKY
HLAVOLAM NEJEN PRO DLOUHÉ ZIMNÍ VEČERY

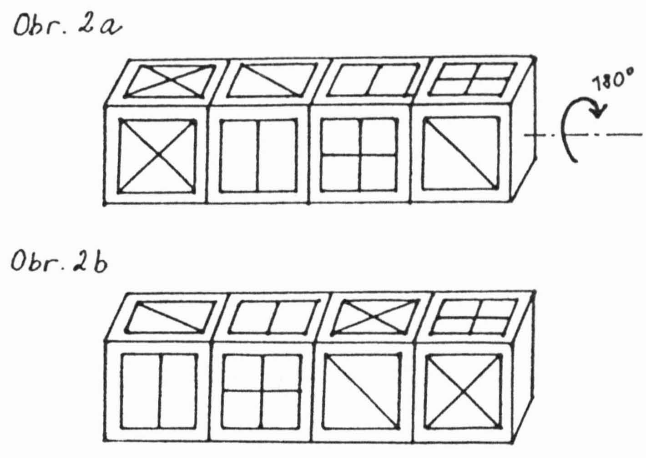
HELENA DURNOVÁ

Úloha o čtyřech kostkách nepatří sice mezi populární hlavolamy typu Rubikovy kostky, avšak na rozdíl od ní lze čtyři kostky lehce vyrobit. Podobně jako u Rubikovy kostky, i v případě čtyř kostek je úloha formulována velmi prostě. V tomto krátkém příspěvku najdete nejen návod pro řešení hlavolamu, ale také stručný návod pro testování vámi vyrobené sady kostek.

Hlavolam „čtyři kostky“ se, jak název napovídá, skládá ze čtyř krychlí. Každá ze šesti stěn každé krychle je obarvena jednou ze čtyř barev. Na obr. 1 je příklad sítě jedné takové krychle (místo barev jsou použity obrazce).



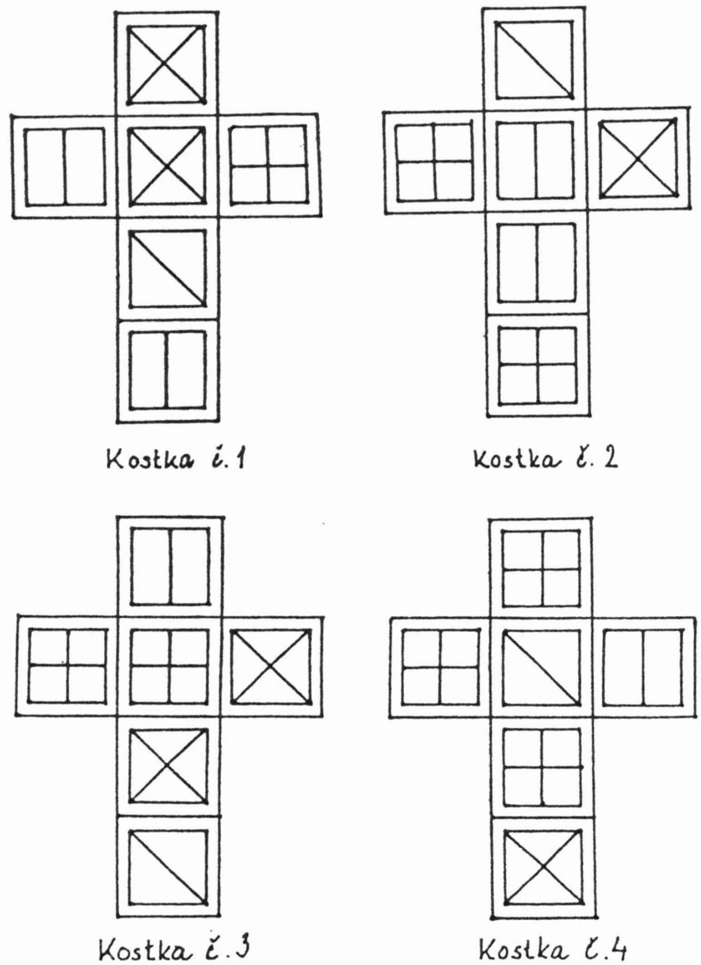
Obr. 1



Obr. 2a,b

Naším úkolem je postavit kostky do hranolu $1\times 1\times 4$ tak, aby na bočních stěnách takto vzniklého hranolu byly zastoupeny všechny čtyři barvy. Obr. 2 ukazuje, jak by mohl takový „hranol“ vypadat. Na obrázku 2a je uveden pohled shora a zepředu, na obr. 2b pohled zespodu a zezadu.

Nyní ukážeme postup řešení hlavolamu pro jednu sadu kostek. Pro názornost uvádím sítě jednotlivých kostek (viz obr. 3).

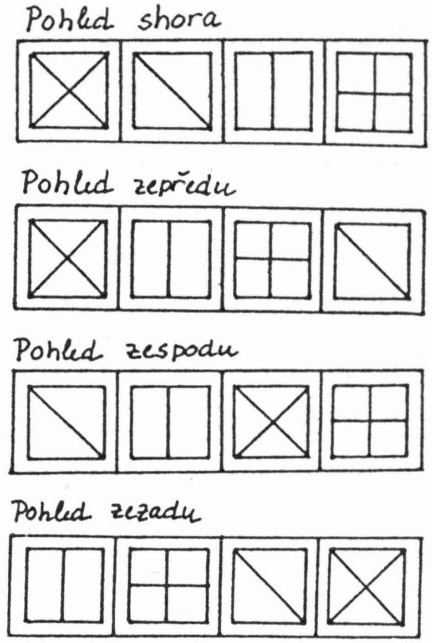


Obr. 3

Poskládat kostky tak, aby vyhovovaly zadání hlavolamu jistě lze (viz obr. 4).

Je tedy vidět, že řešení pro toto obarvení čtyř kostek existuje. Otázkou však zůstává, jakým způsobem lze k řešení dospět. Začneme-li skládat kostky zkusmo, narazíme na drobný problém: vidíme jen dvě stěny hranolu. (Bereme kostky jako celek, skryté boční stěny nás nezajímají). Samozřejmě můžeme zkusit najít řešení postupným zkoumáním všech možností. Tato metoda je však časově dosti náročná. Pomocí teorie grafů však najdeme řešení snadno a rychle — popřípadě stejně rychle zjistíme, že hlavolam pro dané obarvení stěn krychlí řešení nemá.

Uveďme několik speciálních případů obarvení čtyř kostek.



Obr. 4

Máme-li čtyři jednobarevné kostky, řešení je nasnadě: je-li každá kostka obarvena jinou barvou, vyhovuje libovolné sestavení kostek.

Podívejme se, jak souvisí řešitelnost s počty stěn obarvených jednotlivými barvami. Máme-li např. sadu kostek, v níž jsou pouze tři zelené stěny, je zřejmé, že úloha nemá řešení. Podobná situace nastane, máme-li sice „dostatek" stěn dané barvy, ale tyto stěny jsou nevhodně umístěné. (Například tak, že jedna ze čtyř stěn dané barvy zůstane vždy stejná.)

Než ukážeme způsob hledání vyhovujícího sestavení čtyř kostek, připomeňme si několik pojmů z teorie grafů.

Graf se skládá z *uzlů* (někdy nazývaných vrcholy) a *hran*. Uzly si představujeme jako body v rovině, hrany jako čáry spojující uzly. Hrany jsou v našem případě neuspořádané dvojice uzlů. Dále říkáme, že uzel u je *incidentní* s hranou h, jestliže uzel u je koncovým bodem hrany h. *Smyčkou* nazveme takovou hranu, která začíná a končí v témže uzlu. *Stupněm uzlu* nazveme číslo označující počet hran incidentních s daným vrcholem. *Podgrafem* G' *grafu* G nazveme množinu sestávající z některých uzlů grafu G

a z některých hran grafu G takových, že oba koncové uzly hrany náleží podgrafu G'. Podgraf G' grafu G se nazývá *faktor*, obsahuje-li všechny uzly grafu G a některé jeho hrany. *Pravidelným grafem* nazveme takový graf, v němž mají všechny uzly stejný stupeň. Konečný souvislý[8] pravidelný graf druhého stupně nazýváme *kružnicí.*

Možná si řeknete, že kostky si lze těžko představit jako body a čáry v rovině. Spojovat uzly–města hranami–silnicemi se zdá celkem přirozené, avšak jak popsat grafem čtyři kostky?

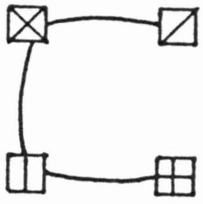
Reprezentace čtyř kostek grafem

Pro znázornění hlavolamu grafem využijeme toho, že neměnnou charakteristikou každé kostky je „trojice dvojic" protějších stěn. Pro řešení hlavolamu využijeme z každé kostky právě dvě z těchto dvojic. Když kostkami otáčíme, poloha stěn se sice mění, dvojice barev na protějších stěnách však zůstávají tytéž. V našem grafu budou tyto dvojice protějších stěn reprezentovány hranami, jednotlivé barvy pak uzly. Pro jednu kostku tak získáme graf na čtyřech uzlech (reprezentujících barvy), v němž vždy dva uzly budou spojeny hranou právě tehdy když kostka obsahuje dvojici protějších stěn obarvených danými barvami. Pokud kostka obsahuje dvojici protějších stěn téže barvy, znázorníme tuto dvojici smyčkou (viz obr. 5).

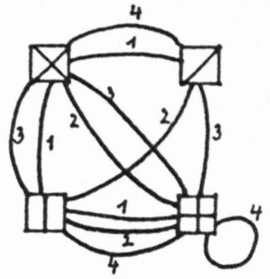
Chceme-li nyní do téhož grafu znázornit dvojice protějších stěn všech čtyř kostek, bude vhodné odlišit hrany reprezentující různé kostky. Očíslujme tedy kostky čísly 1, 2, 3 a 4. Analogicky očíslujeme jednotlivé hrany grafu — podle toho, na které kostce se dvojice barev vyskytuje na protějších stěnách. Výsledný graf bude mít 4 uzly a 12 hran: po třech hranách očíslovaných čísly 1, 2, 3, 4 (viz obr. 6).

---

[8]Připomeňme, že graf se nazývá *souvislý*, když jsou hranami propojeny libovolné dva uzly.



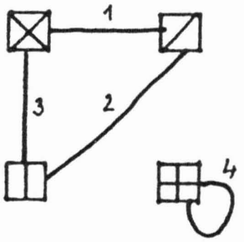
Obr. 5



Obr. 6

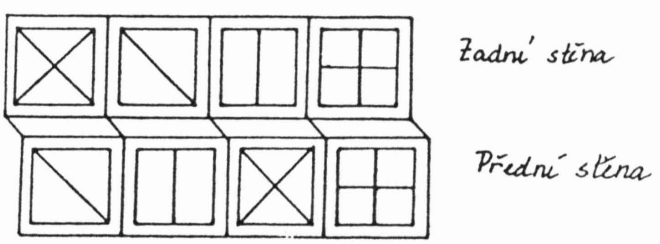
Řešení hlavolamu pomocí získaného grafu

Nyní je třeba informace zakreslené v grafu zpracovat — tj. zjistit, zda existuje řešení hlavolamu. Ukážeme, že řešení určují dva pravidelné faktory stupně 2 grafu G. Množiny hran těchto dvou faktorů musí navíc být disjunktní. Pravidelný faktor 2. stupně grafu G určuje sestavení např. přední a zadní (resp. horní a dolní) stěny hranolu sestaveného z daných čtyř kostek. Pro náš příklad dostáváme např. tento vyhovující faktor (viz obr. 7).



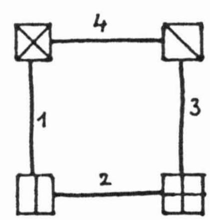
Obr. 7

Tento faktor nám říká, které dvojice protějších stěn se budou vyskytovat v hranolu na přední a zadní straně. Která ze dvou barev však bude na straně přední a která na straně zadní? Pokud to není pro čtenáře samozřejmé, osvětlí postup sestavování obr. 8.



Obr. 8

V grafu sestávajícím ze stejných uzlů, avšak bez hran použitých v předchozím faktoru, budeme nyní analogickým způsobem hledat faktor určující sestavení horní a dolní stěny hranolu. (Pokud se nám to nepovede, bude nutné ještě zjistit, zda nenajdeme jinou dvojici faktorů určujících sestavení kostek do hranolu.) Je totiž možné, že jsme výběrem prvního faktoru vyloučili „nevhodné hrany“ a tím jsme zablokovali možnost sestavit kostky tak, aby to vyhovovalo zadání. Zbývající dvojice protějších stěn kostek zůstanou skryté.

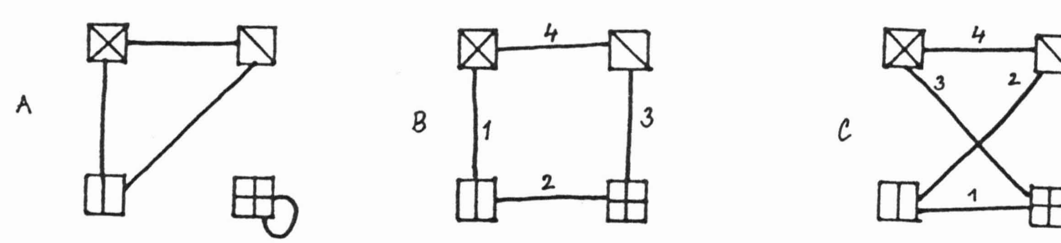


Obr. 9

Řešení odpovídající faktorům na obrázcích 7 a 9 je uvedeno na obrázku č. 4.

Nalezení všech řešení a zjištění obtížnosti hlavolamu

Nepovede-li se nalézt řešení přímo výše popsanou metodou, můžeme ještě vyzkoušet postup, který najde VŠECHNA sestavení čtyř kostek do hranolu: nejprve najdeme všechny možné faktory grafu G (pravidelné, stupně 2), a potom zkoumáme, které z nich neobsahují tytéž hrany. Z následujícího je z zřejmé, že pro naši konkrétní sadu kostek existují 3 různé faktory (označené A, B a C), z nichž však pouze AC a BC vyhovují požadavku prázdného průniku množin hran.

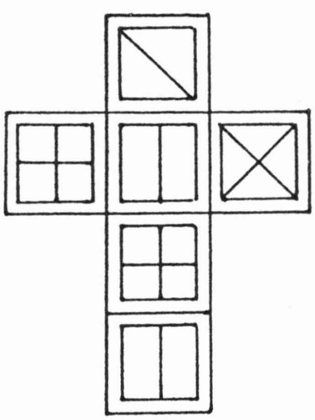


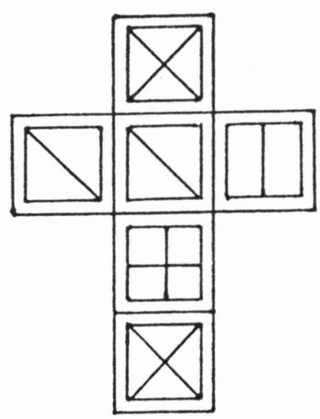
Obr. 10

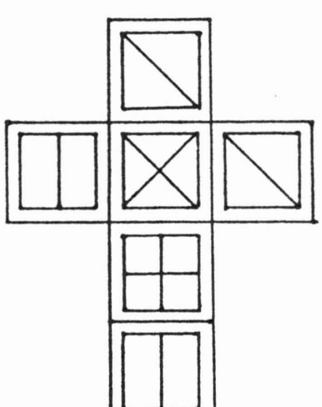
Výše popsanou metodu můžeme také použít, chceme-li zjistit, jak obtížný je konkrétní hlavolam. Pro výše uvedenou sadu kostek už počet všech řešení známe. Vzhledem k tomu, že celkem je $41\,472 = 3 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24$ možností pro sestavení čtyř kostek do hranolu, lze usoudit, že sestavit vhodným způsobem tuto konkrétní sadu kostek zkusmo bude poměrně obtížné. Naproti tomu za pomocí teorie grafů je třeba vyzkoušet pouze $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ možných faktorů – kružnic (z nichž ne všechny jsou disjunktní).

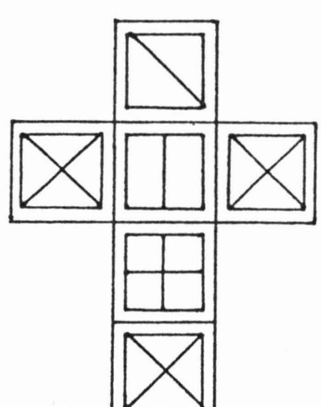
Chceme-li obarvit čtyři kostky tak, aby daný hlavolam měl řešení, stačí pochopitelně obarvit nejprve hranol „v kuse“, potom obarvit zbývající dvě stěny na každé kostce a nakonec zjistit, jak složitý je vzniklý hlavolam. (V případě, že je hlavolam příliš lehký, můžeme zkusit stěny přebarvit.)

Na závěr uvádím sítě kostek jiné sady. Na těchto kostkách si můžete popsanou metodu vyzkoušet sami.


Kostka č. 1.


Kostka č. 2


Kostka č. 3


Kostka č. 4