Emil Calda

Součet mocnin prvních n přirozených čísel aneb Hra čísel mámivá

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 2, 104–108

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150933`

SOUČET MOCNIN PRVNÍCH n PŘIROZENÝCH ČÍSEL

aneb

HRA ČÍSEL MÁMIVÁ

s EMILEM CALDOU

V následujících řádcích odvodíme známé vzorce

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

způsobem, který asi příliš známý není. K odvození prvního nepotřebujeme skoro nic, k odvození dalších dvou vystačíme se základními poznatky o aritmetické posloupnosti.

Určíme nejprve součet $1+2+3+\cdots+n$, kde n je libovolné přirozené číslo, a to pomocí tabulky složené z n řádků a $n+1$ sloupců, v nichž jsou rozmístěny nuly a jedničky tak, že v k-tém řádku ($k=1,2,\ldots,n$) je k jedniček a $n+1-k$ nul:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\
1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

Je zcela zřejmé, že všech čísel v této tabulce je $n(n+1)$, že všech jedniček je v ní $1+2+3+\cdots+n$ a všech nul také. Platí tedy

$$2(1+2+3+\cdots+n) = n(n+1)$$

neboli

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) .$$

Tím je první z výše uvedených vzorců odvozen.

K určení součtu $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$, kde n je libovolné přirozené číslo, použijeme tabulku, jejíž k-tý řádek se pro všechna $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ skládá z k čísel, z nichž každé je rovno k:

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
2 & 2 & & & & \\
3 & 3 & 3 & & & \\
4 & 4 & 4 & 4 & & \\
\multicolumn{6}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\
n & n & n & n & \ldots & n
\end{array}$$

Určíme součet všech čísel v této tabulce, a to dvěma způsoby: sečteme je nejprve po řádcích a potom po sloupcích.

Součet všech k čísel k-tého řádku pro všechna $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ je

$$k + k + k + \cdots + k = k^2 ,$$

takže součet všech čísel tabulky po řádcích je roven $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Sečteme-li všechna čísla tabulky po sloupcích, vznikne výraz

$$\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n-1)(n+2) + \frac{1}{2}(n-2)(n+3) + \cdots + (n + (n-1)) + n ,$$

který vyjádříme ve tvaru

$$\frac{1}{2}\big[(n-0)(n+1) + (n-1)(n+2) + (n-2)(n+3) + \ldots$$

$$+ (n-(n-2))(n+(n-1)) + (n-(n-1))(n+n)\big] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)(n+k+1) .$$

Úpravou výrazu $(n-k)(n+k+1) = (n^2+n) - (k^2+k)$ dostaneme, že hledaný součet je

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(n^2+n) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(k^2+k) = \frac{1}{2}n(n^2+n) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}k$$

a dosazením

$$\sum_{k=0}^{n-1}k = \sum_{k=1}^{n-1}k = \frac{1}{2}(n-1)n\ ,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^2 = \sum_{k=1}^{n-1}k^2 = -n^2 + \sum_{k=1}^{n}k^2$$

zjistíme, že součet všech čísel tabulky po sloupcích je dán výrazem

$$\frac{1}{2}n(n^2+n) + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{1}{4}(n-1)n\ .$$

Tento výraz je však roven součtu všech čísel tabulky po řádcích, takže platí

$$\frac{1}{2}n(n^2+n) + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{1}{4}(n-1)n = \sum_{k=1}^{n}k^2\ .$$

Odtud už snadno vypočteme

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\ .$$

Zbývá nám už jen určit součet $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$, kde n je libovolné přirozené číslo. Vyjdeme z tabulky složené z n řádků, ve kterých jsou umístěna po sobě jdoucí lichá přirozená čísla tak, že jejich počet v každém řádku je roven pořadovému číslu tohoto řádku (počítáno shora):

$$\begin{array}{llllll} 1 \\ 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 & 19 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ r & r+2 & r+4 & r+6 & r+8 & \dots \quad s \end{array}$$

Ukážeme nejprve, že součet čísel k-tého řádku této tabulky je pro všechna $k = 1, 2, 3, \dots, n$ roven k^3.

Označme m první číslo k-tého řádku a mysleme si, že posloupnost lichých přirozených čísel je rozložena do skupin tvořených čísly jednotlivých řádků: (1), $(3, 5)$, $(7, 9, 11)$, $(13, 15, 17, 19), \dots,$ $(\dots, m-2)$, $(m, \dots)$. Číslo m je tedy prvním členem k-té skupiny, což znamená, že v posloupnosti $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ má pořadové číslo $1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + 1 = \frac{1}{2}(k-1)k + 1 = \frac{1}{2}(k^2 - k + 2)$. Platí proto

$$m = 2\frac{1}{2}(k^2 - k + 2) - 1 = k^2 - k + 1 \,,$$

takže k-tý řádek je tvořen čísly

$$k^2 - k + 1 \,, \quad k^2 - k + 3 \,, \quad k^2 - k + 5 \,, \quad \dots \,, \quad k^2 - k + (2k-1) \,;$$

jejich součet je

$$\frac{1}{2}k\left[(k^2 - k + 1) + (k^2 + k - 1)\right] = k^3 \,.$$

Odtud plyne, že součet všech čísel dané tabulky, která má n řádků, je $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Součet všech čísel této tabulky je však také roven výrazu

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + s = \frac{1}{2}p(1 + s) \,,$$

kde p je počet všech čísel této tabulky, tj.

$$p = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) ;$$

pro číslo s platí $s = 2p - 1$, neboť toto číslo je p-tým členem posloupnosti všech lichých přirozených čísel. Dosazením za s a p do odvozeného vztahu dostáváme, že součet všech čísel v dané tabulce je

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + s = \frac{1}{2}p(1+s) = \frac{1}{2}p \cdot 2p = p^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 .$$

Porovnáním obou výrazů, které jsme získali pro součet všech čísel naší tabulky, je požadovaný vzorec odvozen:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 .$$

Známým důsledkem tohoto vztahu je rovnost

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 ,$$

která platí pro všechna přirozená čísla n.

Naše hra s čísly je tím u konce. Čtenář však truchlit nemusí, neboť se jednalo o pouhou epizodu hry nikdy nekončící.