Dag Hrubý

O jedné úloze na extrém

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 1, 54–56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150922

O JEDNÉ ÚLOZE NA EXTRÉM

DAG HRUBÝ

Ve „žluté“ knížce [1] je na straně 148 uvedena, podle mého názoru, velice zajímavá úloha na nalezení extrému. Je převzata z časopisu KVANT [2] a potvrzuje přísloví, že „práce kvapná, málo platná“. Krátce řečeno, úloha mne zaujala a přinesla mi radost. Cílem tohoto článku je podělit se o tuto radost s váženými čtenáři našeho časopisu.

Úloha 1

Jaký největší povrch může mít kvádr s obsahem podstavy 1 a délkou telesové úhlopříčky 2?

Řešení:

Označme délky hran kvádru a, b, c. Z předpokladu plyne, že

$$ab = 1$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 4$$

Odtud plyne $(a+b)^2 + c^2 = 6$, tedy $a + b = \sqrt{6 - c^2}$. Pro povrch hranolu pak dostáváme:

$$S = 2ab + 2c(a+b) = 2 + 2c\sqrt{6-c^2} = 2 + 2\sqrt{9 - (c^2-3)^2}.$$

Poslední výraz je maximální právě když $c^2 = 3$, tj. $c = \sqrt{3}$. Potom je $S = 8$. Zdá se, že je všechno v pořádku. Chvíle uspokojení však nemá dlouhého trvání. Stačí, až někoho napadne dopočítat ještě velikosti hran a, b. Vzhledem k $a^2 + b^2 + c^2 = 4, ab = 1$ dostáváme po dosazení za $c = \sqrt{3}$ a za $b = \frac{1}{a}$ rovnost $a^2 + \frac{1}{a^2} = 1$, tedy

$$a^4 - a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

což ale znamená, že a, b nejsou reálná čísla. Co teď?

Vrátíme se k výrazu $S(c) = 2 + 2\sqrt{9 - (c^2 - 3)^2}$ a budeme hledat jeho extrémy pomocí 1. derivace. Zřejmě platí:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}c} = \frac{-4c(c^2 - 3)}{\sqrt{9 - (c^2 - 3)^2}}$$

Na první, maximálně na druhý, pohled vidíme, že nulovými body 1. derivace jsou body $c_1 = -\sqrt{3}, c_2 = 0, c_3 = \sqrt{3}$. Dříve, než se vyjádříme k monotónnosti funkce $S = S(c)$, určíme si její definiční obor. Musí platit $9 - (c^2 - 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq c \leq \sqrt{6}$. To znamená, že $c \in \langle 0; \sqrt{6} \rangle$. Nyní už můžeme říci, že funkce $S = S(c)$ je v intervalu $(0; \sqrt{3})$ rostoucí a v intervalu $(\sqrt{3}; \sqrt{6})$ klesající. V bodě $c_3 = \sqrt{3}$ nabývá svého lokálního maxima. To je sice hezké, ale jsme tam, kde jsme již byli. Hodnota $c_{max} = \sqrt{3}$ k cíli nevede.

Dříve, než to vzdáme a prohlásíme, že úloha nemá řešení se naposledy zamyslíme nad výrazem $S(c)$. Výraz $S(c) = 2 + 2\sqrt{9 - (c^2 - 3)^2}$ je utvořen zřejmě správně, tudy cesta nevede. Zaměříme se tedy na definiční obor proměnné c. Zatím jsme „zjistili", že $c \in \langle 0; \sqrt{6} \rangle$. Podíváme-li se ale na rovnost $a^2 + b^2 + c^2 = 4$, tak pro c dostáváme $c^2 = 4 - (a^2 + b^2) \leq 4$, tedy $c \leq 2$. To nás sice trochu zneklidní, ale není to v rozporu s hodnotou $c = \sqrt{3}$, protože je $\sqrt{3} < 2$. Poznamenáme si zatím, že $c \in \langle 0; 2 \rangle$. To však není všechno. Vzhledem k $ab = 1$ je totiž

$$c^2 = 4 - (a^2 + b^2) = 2 - (a - b)^2 \leq 2, \quad \text{a tedy} \quad 0 \leq c \leq \sqrt{2}$$

Vzhledem ke geometrické interpretaci vyloučíme hodnotu $c = 0$ a pro c pak platí: $c \in \left(0; \sqrt{2}\right\rangle$. Funkce $S = S(c)$ je rostoucí v intervalu $(0; \sqrt{3})$ a tedy také v intervalu $\left(0; \sqrt{2}\right\rangle$. Největší hodnotu nabývá proto v bodě $c = \sqrt{2}$. Pro maximální povrch kvádru pak dostáváme $S(2) = 2 + 2\sqrt{9 - (2 - 3)^2} = 2 + 4\sqrt{2}$. Pro velikosti hran a, b pak dostáváme $a^2 + b^2 = 2$ a odtud vzhledem k $ab = 1$ plyne ihned $a = 1$, $b = 1$. Náš problém vznikl proto, že jsme zpočátku věnovali malou pozornost oboru proměnné c.

Na závěr si uveďme řešení studenta Karla Kodytka, který má z matematiky dobrou a nepůjde studovat na VŠ, protože převezme živnost po svém otci, uzenáři Ferdinandovi Kodytkovi. Dejme tedy slovo Karlovi.

Řešení Karla Kodytka:

Karel: „Každý osel přece ví, že když je $ab = 1$*, tak musí být* $a = 1$ *a* $b = 1$*. Když dosadím do rovnice* $a^2 + b^2 + c^2 = 4$*, tak dostanu, že* $c^2 = 2$ *a proto je* $c = \sqrt{2}$*. Dosadím do* S *a dostanu* $S = 2 + 4\sqrt{2}$*.“*

Prosím laskavé čtenáře o hodnocení Karlova výkonu.

LITERATURA

[1] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2.*, SPN, Bratislava, 1989.

[2] KVANT **41** (1979), sešit 3

★ ★ ★

CELOSTÁTNÍ KONFERENCE UČITELŮ MATEMATIKY ODBORNÝCH ŠKOL

Ve dnech 22. – 24. září 1999 se v Kongresové hale Univerzity Pardubice sešla v rámci oslav stého výročí založení Střední průmyslové školy strojnické v Chrudimi celostátní konference učitelů matematiky odborných škol s názvem *Jak učit matematiku na odborných školách.*

Konference, kterou pořádala odborná skupina matematiky na středních odborných školách při matematickopedagogické sekci Jednoty českých matematiků a fyziků ve spolupráci s pobočkou JČMF Pardubice, Pedagogickým centrem v Hradci Králové, Univerzitou Pardubice a Střední průmyslovou školou strojnickou v Chrudimi, se zúčastnilo více než 180 učitelů matematiky ze všech typů odborných škol z celé republiky.

Jako hosté se jednání konference zúčastnili rektor Univerzity Pardubice Prof. Ing. Oldřich Pytela, DrSc., člen rady města Pardubice a ředitel gymnázia Pardubice RNDr. Josef Kubát a náměstek ředitele VÚOŠ RNDr. František Barták.