Učitel matematiky

Marie Kupčáková

Modelování těles - návrhy úloh pro geometrické praktikum (2)

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 1, 27–36

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150919`

Terms of use:

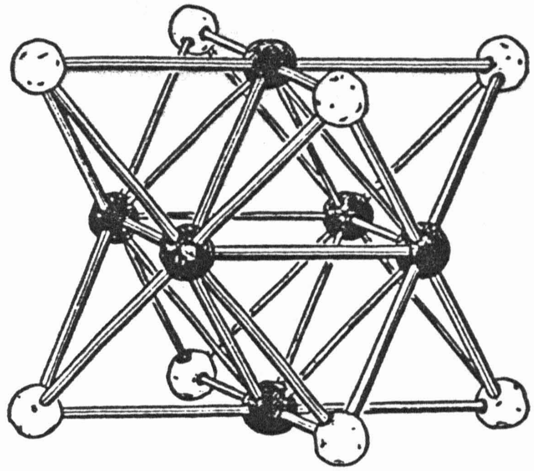
© Jednota českých matematiků a fyziků, 2000

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

MODELOVÁNÍ TĚLES – NÁVRHY ÚLOH PRO GEOMETRICKÉ PRAKTIKUM (2)

MARIE KUPČÁKOVÁ



Tento článek je pokračováním příspěvku z čísla 3 minulého ročníku, v němž jsme zavedli pojem „*deltastěny*“ a uvedli jsme některé náměty pro jejich modelování. Kromě známého vytváření papírových modelů a elegantních modelů počítačových jsme čtenáře seznámili s praktickými zkušenostmi s vytvářením tzv. hranových modelů (žáci mají k dispozici modelínu „**JOVI**“, oboustranně zahrocená párátka a kousek plíšku). Modelovali jsme konvexní deltastěny a uvedli jsme, že existuje pouze osm typů těchto mnohostěnů.

B. Modelování nekonvexních deltastěnů

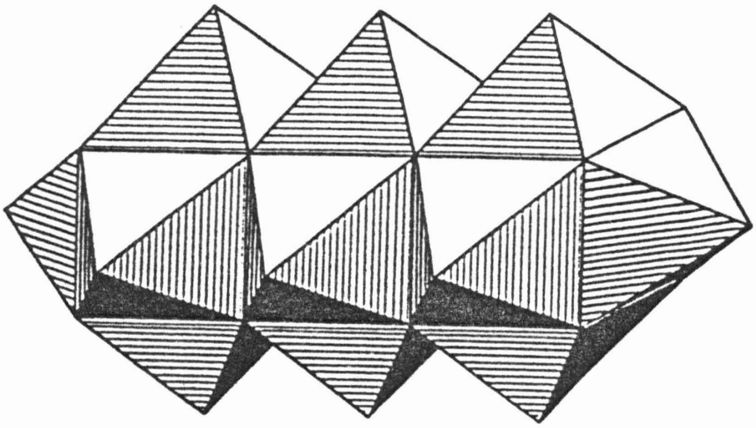
Připomeňme si, že deltastěn je těleso, jehož hranici tvoří shodné rovnostranné trojúhelníky, a položme si otázku, jak je možné konstruovat *nekonvexní deltastěny.*

Takovýchto těles bude zřejmě nekonečně mnoho. Stačí si např. představit, že ke stěnám pravidelného čtyřstěnu budeme připojovat další pravidelné čtyřstěny. Jiným typem nekonvexního deltastěnu je prostorový útvar na obrázku 1. Kdybychom odebrali poslední pravidelný čtyřboký jehlan, mohli bychom naznačeným způsobem nekonvexního „ježka“ dále neomezeně prodlužovat.

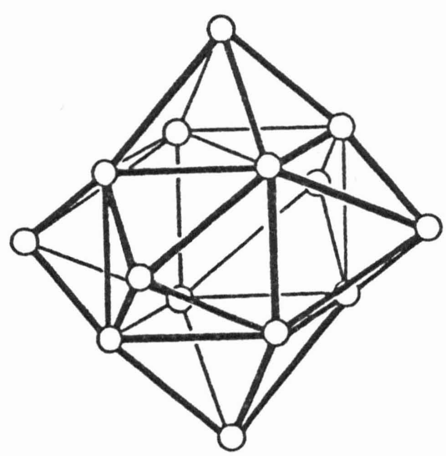
Hranový model nekonvexního deltastěnu jsme sestavili i v minulém příspěvku. Byl jím *nekonvexní dvacetistěn*, který vznikl vmáčknutím jednoho vrcholu pravidelného dvacetistěnu dovnitř tělesa. Jeho papírový model najdete v dnešní příloze.

1. *Sestavte hranový model krychle. Přidáním dalších špejlí vymodelujte deltastěn. Pojmenujte jej.* (obr. 2)
2. *Sestrojte síť tohoto mnohostěnu, doplňte záložky na slepení a vyrobte papírový model* **nekonvexního delta-dvacetičtyřstěnu.**

Řešení úlohy můžeme ponechat jako samostatnou práci. Je zřejmé, že řešitelé mohou navrhnout různé sítě, jednu z nich vidíte na obrázku 3.



Obr. 1

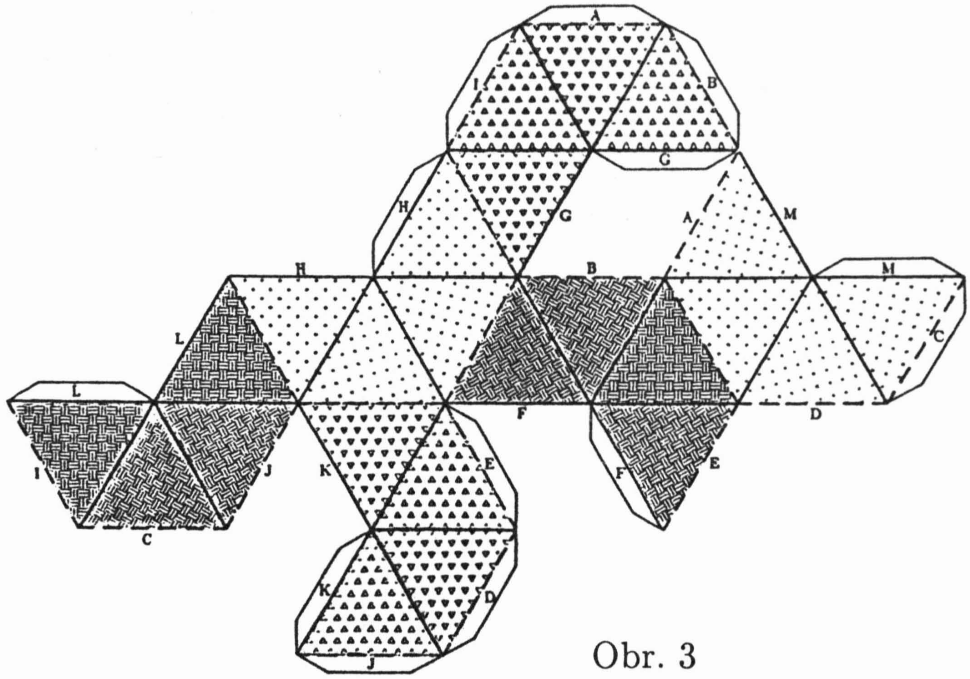


Obr. 2

Keplerova stella octangula

Tělesa na obrázku z úvodu článku si snad poprvé všimnul na konci patnáctého století františkánský mnich a významný matematik té doby *Luca Pacioli.* Zařadil jej mezi ostatní tělesa svého pojednání *De divina proporcione — O božské proporci* (tato proporce byla později nazvána „zlatý řez"). *Leonardo da Vinci* dílo ilustroval. S precizností a pečlivostí jemu vlastními provedl geometrické studie, náčrtky, výpočty, vyrobil dřevěné kostry všech mnohostěnů a ty teprve kreslil. Také vy můžete s žáky mnohostěn, opět pomocí modelíny a špejlí, vymodelovat, a potom dokonce i nakreslit.

Luca Pacioli toto těleso nazval *octahedron elevatus solidus* — **protažený osmistěn plný.**



Obr. 3

3. *„Protažené" stěny pravidelného osmistěnu se protínají vně tělesa v průsečnicích, na kterých leží hrany připojených čtyřstěnů. Vznikne tedy nekonvexní delta - dvacetičtyřstěn. Vymodelujte jej.*

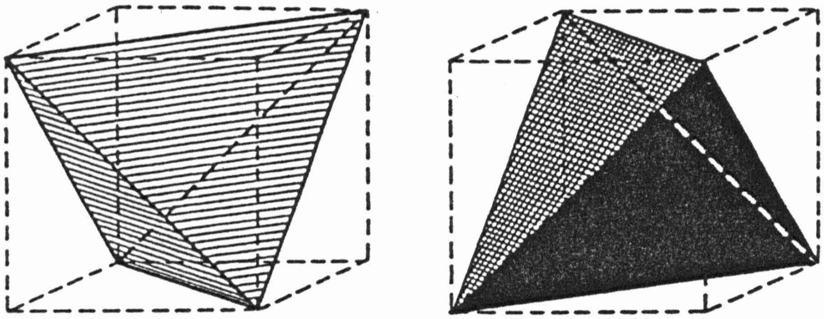
K modelování použijeme dvě barvy modelíny. Vrcholy pravidelného osmistěnu vymodelujeme jednou barvou, vrcholy čtyřstěnů druhou.

Jan Kepler o sto let později zřejmě toto těleso znovu objevil a dal mu dodnes používaný název **stella octangula – hvězda osmicípá.** (Obrázek jejího hranového modelu jsme uvedli v úvodu článku.)

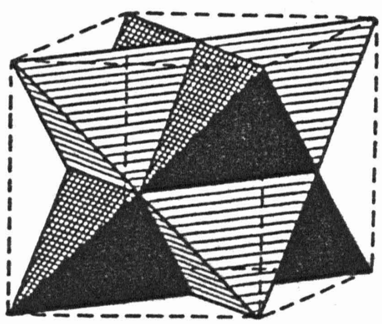
4. *Lze sestrojit* **papírový model stelly octanguly** *z jednoho*

kusu papíru? Pokuste se o to.
Jedno z řešení je v příloze časopisu.

5. *Ověřte, že tělesa vepsaná do krychle podle obrázku 4 jsou pravidelné čtyřstěny a že jejich sjednocením je stella octangula.* (obr. 5)



Obr. 4



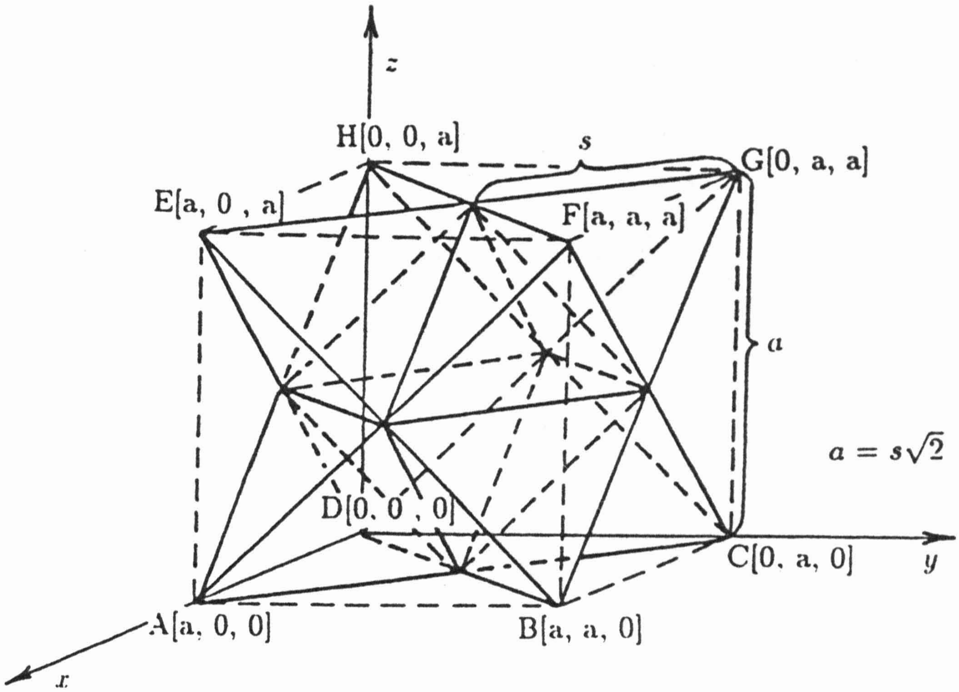
Obr. 5

Stellu octangulu můžeme tedy umístit do krychle tak, že hrany velkých čtyřstěnů jsou stěnovými úhlopříčkami krychle. Toho můžeme využít při **<u>počítačovém modelování</u> stelly octanguly**. Vrcholy čtyřstěnů mají souřadnice popsané v obrázku 6.

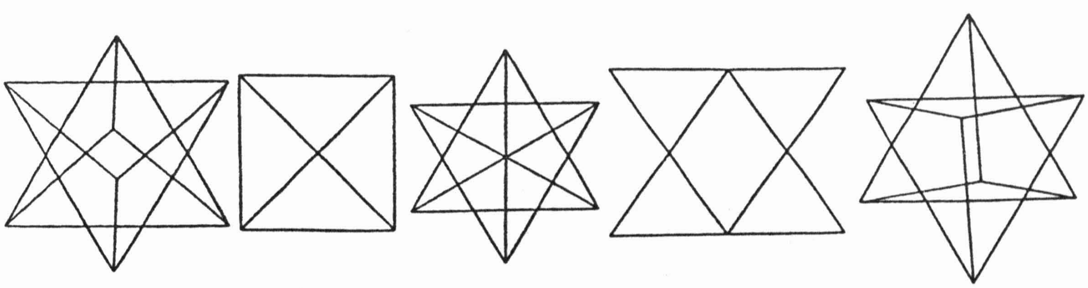
Nyní máme připraveno všechno, abychom mohli modelovat pomocí počítače. Na obrázku 7 je zachyceno pět různých pohledů na drátový model stelly octanguly.

6. *Prostor můžeme zřejmě vyplnit shodnými krychlemi. Jak bude vyplněn prostor, jestliže z každé krychle necháme jen stellu octangulu jí vepsanou? Všechny zhotovené modely přikládejte na sebe a vedle sebe a pokuste se zjistit, jaký prostorový útvar bychom mohli do stavby doplnit, aby byl prostor zcela vyplněn.*

Čtveřice hran dvou k sobě přiložených stell octangul tvoří čtverec (jeho hrany leží v úhlopříčkách „velkých" čtverců). Čtyřboký dvojjehlan, jehož všechny hrany mají stejnou délku, musí tedy být oktaedr (obr. 8).



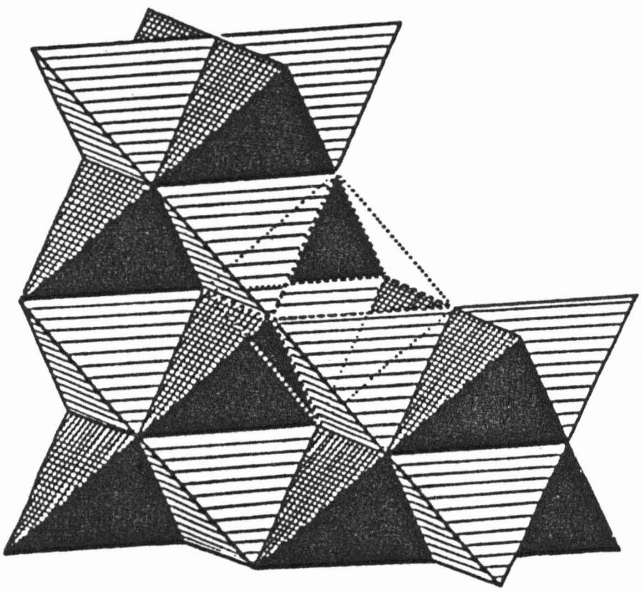
Obr. 6



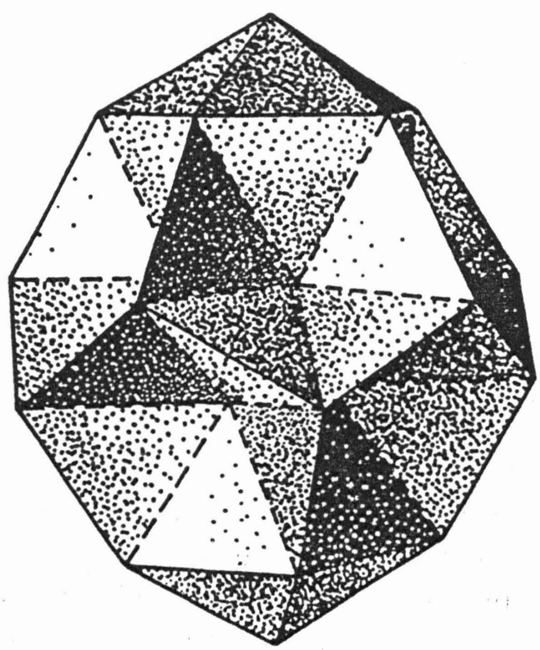
Obr. 7

Pokud si z přílohy časopisu namnožíte (6 – 8 krát) papírové modely stelly octanguly a oktaedru, můžete s žáky vyrobit zajímavou stavebnici. Dá se pomocí ní ukázat, že prostor lze vyplnit pravidelnými osmistěny a čtyřstěny (stella je – jak jsme modelováním v úloze 3 ukázali – sjednocením jednoho oktaedru a osmi tetraedrů). Stavba sama drží pohromadě, což se při vyplňování prostoru jednotlivými oktaedry a tetraedry nezdaří.

Asi jste postřehli, že jednu celou stránku přílohy zabírá jediné těleso — **nekonvexní delta-šedesátistěn**. Nebojte se tak vysokého čísla, sestavení modelu je vcelku snadné a jeho geometrická krása vám bude odměnou (obr. 9).



Obr. 8



Obr. 9

Návod na sestavení papírových modelů

Všechny modely po obvodu vystřihneme, písmena u hran ponecháme v malých trojúhelníčcích a budeme je odstřihovat až v průběhu lepení. Všechny hrany i záložky pozorně a přesně naohýbáme – podél čárkovaných čar přehneme líc na líc, podél plných čar rub na rub. Ke slepování použijeme vhodné lepidlo – např. Kores (práce zůstane čistá, neupatlaná, po zaschnutí budou hrany pevné). Před posledním lepením provlékneme vyznačeným místem nit s uzlem, to pokud chceme mnohostěny zavěsit.

C. Modely plné, jednoduché řezy těles a modely přímkových ploch

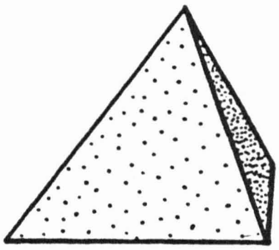
Zatím jsme modelovali tělesa pomocí jejich hran (modely hranové) nebo jejich stěn (modely papírové). Získali jsme sice představu o prostorových vztazích, avšak dokonalejší představu o tělesech budeme mít, když je začneme vytvářet z modelíny.

V připravené krabičce s modelovacími pomůckami je také zatím nepoužitý plíšek. Využijeme jej nyní při výrobě plných modelů a při modelování jednoduchých řezů.

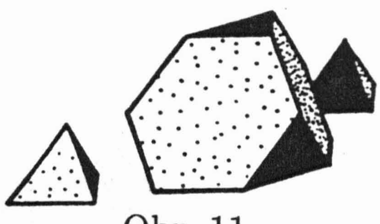
Geometrické praktikum s tímto tématem začínáme zdánlivě jednoduchou úlohou, se kterou však většina řešitelů dlouho bojuje:

1. *Vymodelujte z plastiliny JOVI* **pravidelný čtyřstěn.**

(Žáci mohou hmotu formovat, nebo těleso vyřezávat. Jeho výšku volíme 2,5 – 3 cm., obr. 10)



Obr. 10



Obr. 11

Archimedovské mnohostěny jsou tělesa, která vznikají odřezáváním vrcholů pravidelných mnohostěnů tak, aby všechny hrany vzniklého (tzv. polopravidelného) mnohostěnu byly navzájem shodné. Stěny archimedovského mnohostěnu jsou tedy pravidelné mnohoúhelníky.

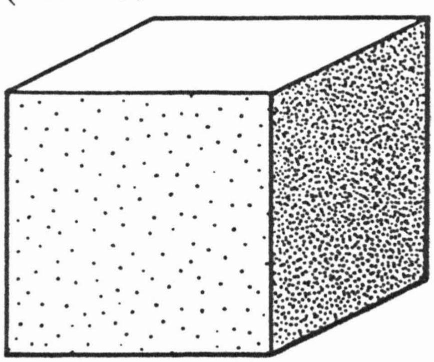
2. *Odřízněte vrcholy pravidelného čtyřstěnu tak, aby ve stěnách zůstaly pravidelné šestiúhelníky.*

Dostali jsme model tělesa, kterému budeme říkat **ořezaný tetraedr** (obr. 11).

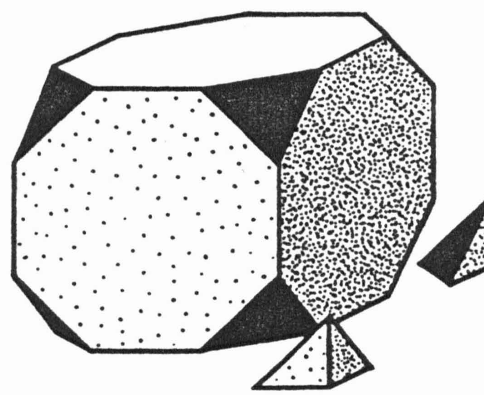
3. *Vymodelujte plnou krychli (*obr. 12*). Jakými geometrickými útvary budou řezy krychle různými rovinami?*

Ptáme se, kdy bude řezem čtverec, trojúhelník, ... , zda může být řezem třeba kosočtverec ap. Žáci postupně odřezávají, popisují, připojují odřezky zpět k tělesu.

4. *Vymodelujte archimedovský mnohostěn, kterému se říká* **ořezaná krychle (ořezaný hexaedr)**. *Řezy vedeme tak,aby ve stěnách původní krychle zůstaly pravidelné osmiúhelníky* (obr. 13).



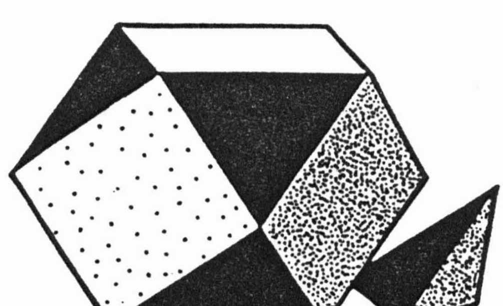
Obr. 12



Obr. 13

5. *Vymodelujte tzv.* **kubooktaedr** — *řezy na krychli vedeme středy hran.*

Povšimněme si, že stejné těleso dostaneme ořezáním oktaedru – osmistěnu (obr. 14).



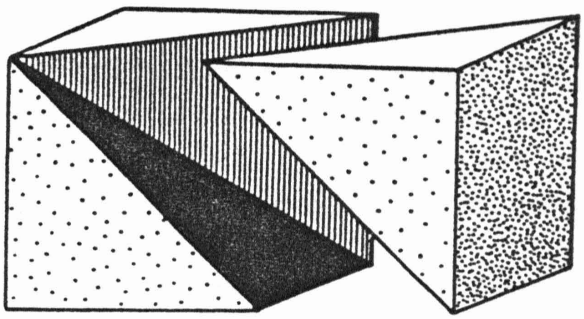
Obr. 14

Mezi úlohy o řezání krychle lze zařadit i úkol, kterým si připravíme v deváté třídě odvození vzorce pro objem jehlanu.

S nesmírným úsilím a velkou chutí řešili deváťáci úlohu, kterou snadno vyřešíme ve volném rovnoběžném promítání, jako reálná úloha však vyžaduje nefalšovanou prostorovou představivost:

6. *Rozřežte krychli na tři shodné jehlany.*

Úloha rozhodně není triviální. Právě proto se vždy setká s velkým ohlasem a ona 1/3 ve vzorci pro objem jehlanu v paměti žáků zůstává (obr. 15).



Obr. 15

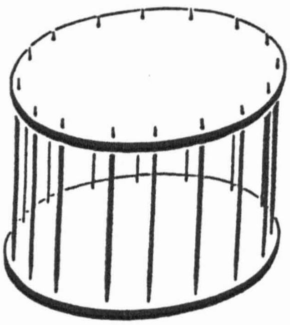
Obdobně bychom mohli pokračovat i dále, můžeme však modelovat i jiné prostorové geometrické útvary, které činí žákům a studentům terminologické potíže, například:

7. *Vymodelujte* **komolý jehlan** *a* **komolý kužel**.

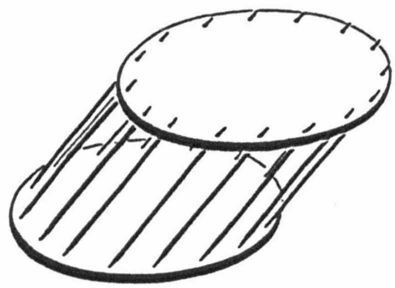
Tato dvě tělesa lze zařadit do dvou rozdílných skupin těles — **tělesa hranatá a oblá.**

8. *Vymodelujte další* **oblá tělesa**.
9. **Rotační válcovou plochu** *budeme modelovat trochu jinak. Připravíme si z modelíny dva pomocné kruhy a špejle, které vhodně zapícháme po obvodu, spojíme* (obr. 16).
10. *V technické praxi se používá termín kruhový válec – ten může být i kosý. Vymodelujte* **kosý kruhový válec** (obr. 17).
11. *Vraťte model do původní polohy a otáčejte horní podstavu kolem osy útvaru. Umíte pojmenovat plochu, která takto vzniká?*

Rotační jednodílný hyperboloid — jako ukázka **přímkové plochy** technické praxe (obe. 18).



Obr. 16

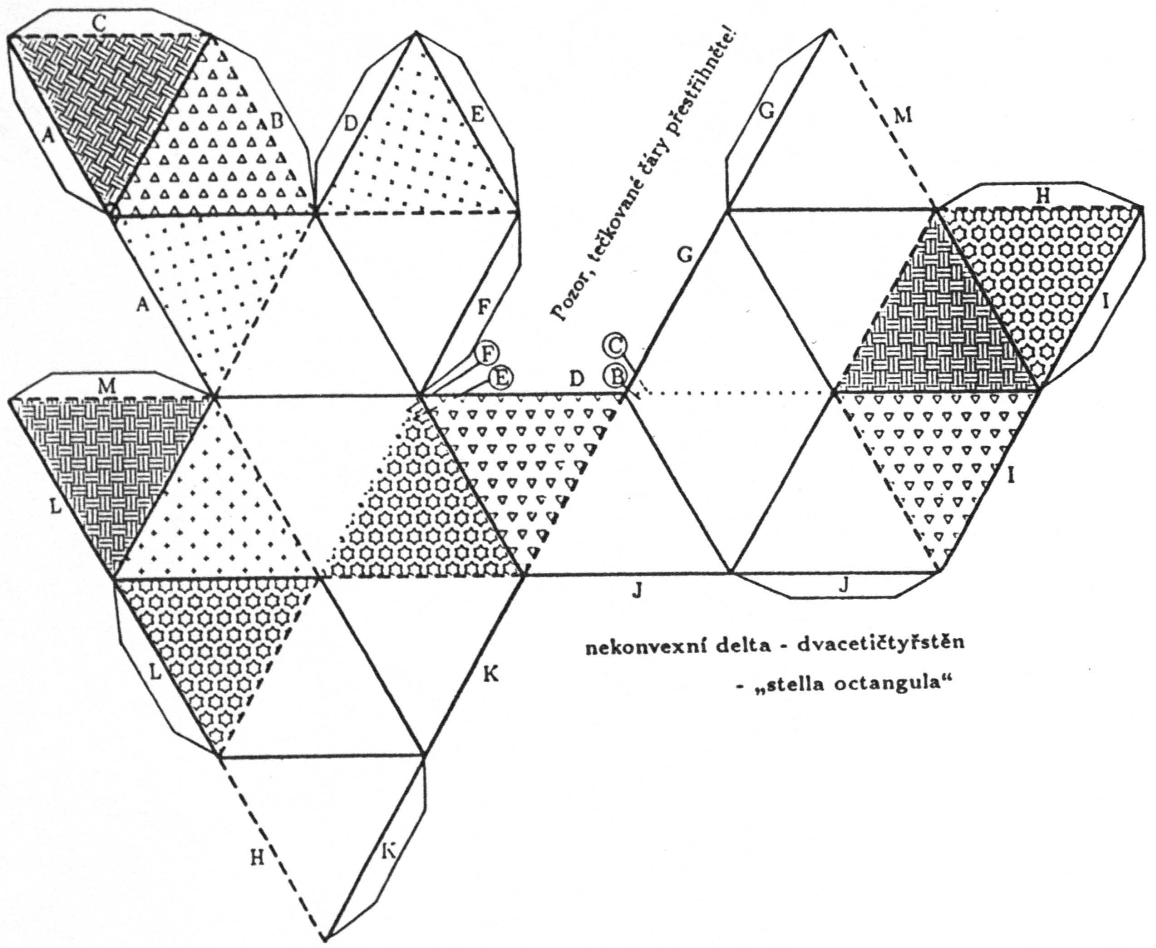


Obr. 17

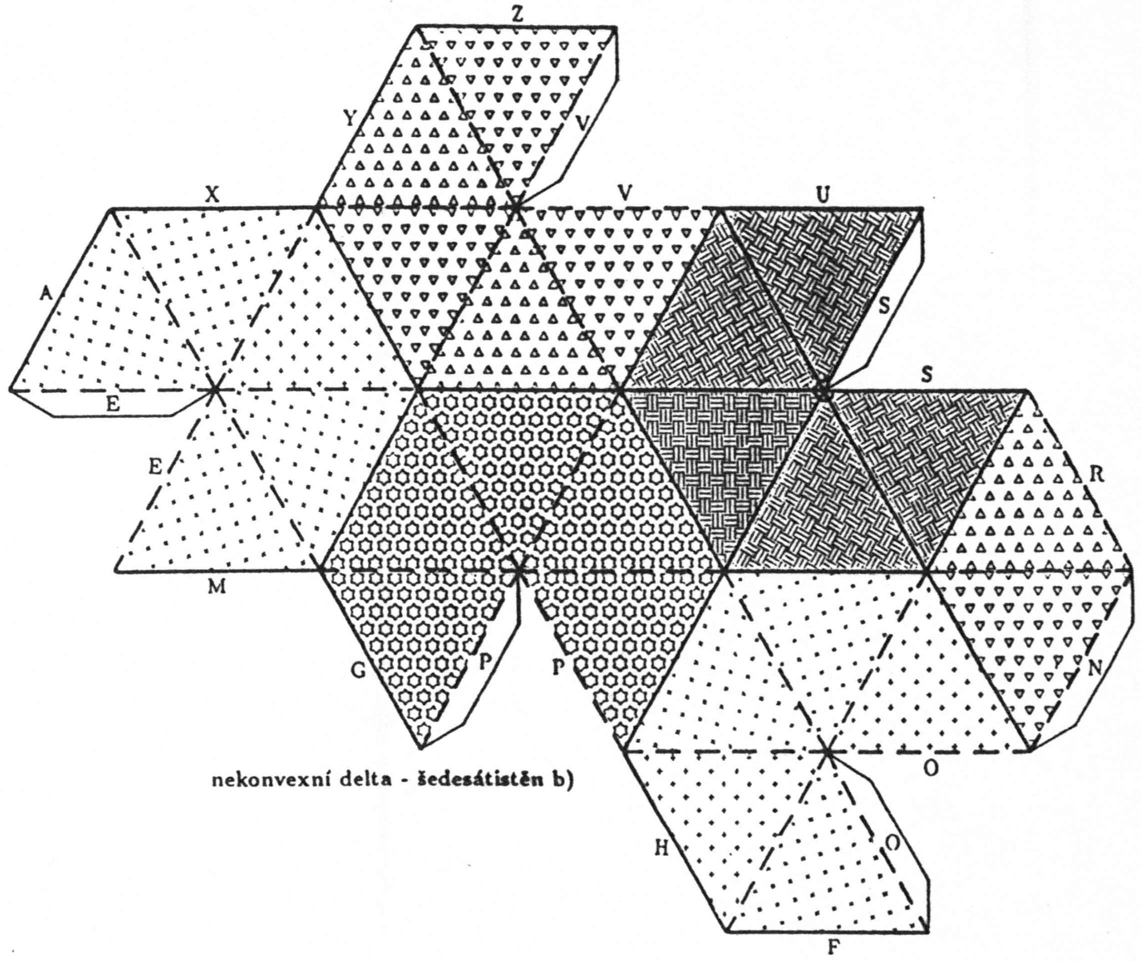
Obr. 18

Závěrem příspěvku bych chtěla čtenáře časopisu povzbudit k odvaze, aby s žáky modelovali prostorové útvary nejenom těmi nejmodernějšími způsoby, ale i těmi nejjednoduššími. Studenti učitelského studia, stejně jako žáci základní školy, během chvilky podlehnou přirozené touze „vyrábět“ a zapomenou na stud, že „si hrají jako malí“.

Věřím, že ani učitelé matematiky si nezapomněli hrát.

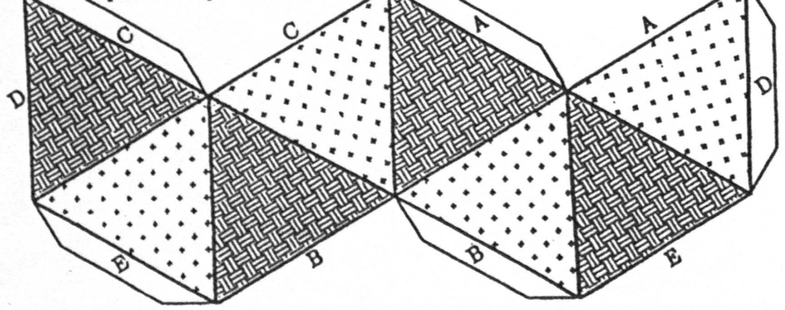


nekonvexní delta - dvacetičtyřstěn
- „stella octangula“

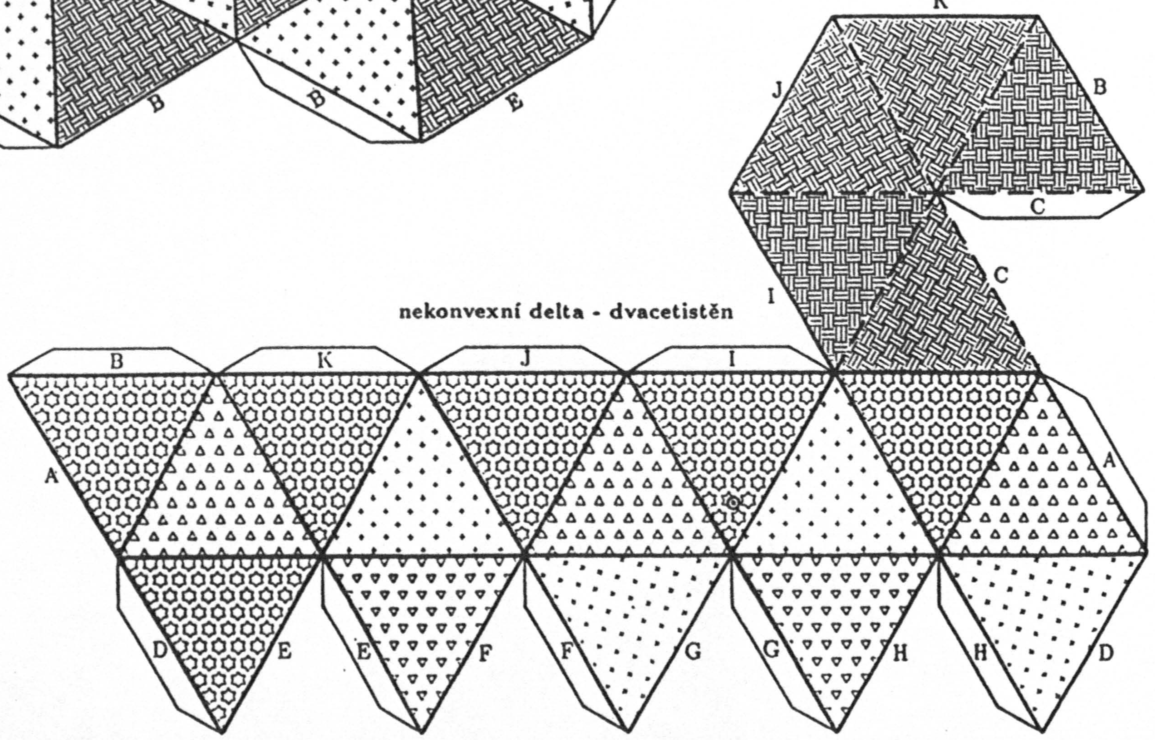


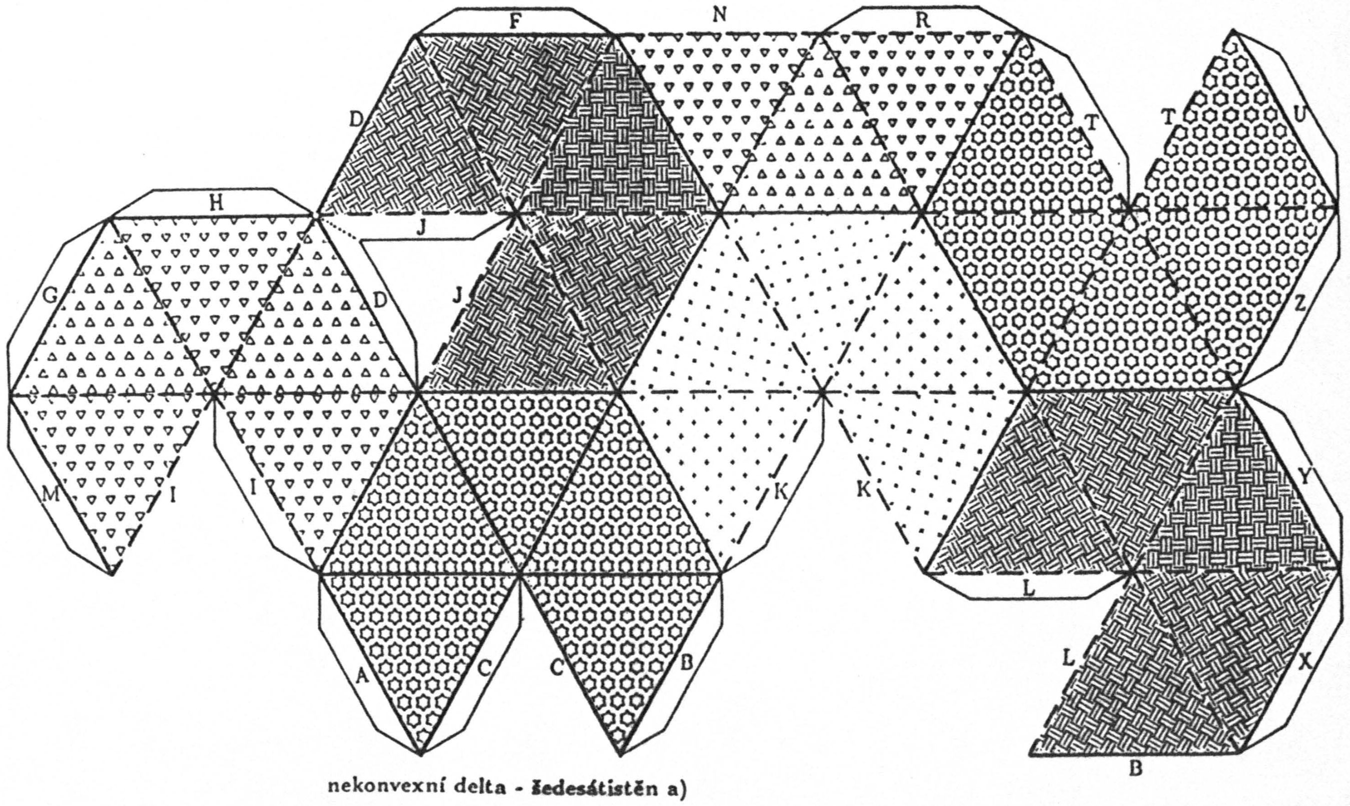
nekonvexní delta - **šedesátistěn b)**

pravidelný osmistěn



nekonvexní delta - dvacetistěn





nekonvexní delta - **šedesátistěn a)**