Učitel matematiky

Emil Calda

Tři nerovnosti s dvojfaktoriálem aneb Jak je užitečné občas si na něco vzpomenout

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 2, 117–120

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150895`

TŘI NEROVNOSTI S DVOJFAKTORIÁLEM

aneb

Jak je užitečné občas si na něco vzpomenout

EMIL CALDA

Podnětem k napsání tohoto článku byl dopis od středoškolského kolegy, v němž mě žádal o vysvětlení pojmu *dvojfaktoriál*, se kterým se setkal v domácí úloze vypracované otcem jednoho z jeho žáků; nebyl si přitom jist, zda se nejedná o vynález patamatematický. Vzhledem k tomu, že tento pojem se ve středoškolské matematice vskutku neobjevuje, bude asi — řekl jsem si — takovýchto kolegů více a nebude snad na škodu, když se o něm v tomto chvalně známém periodiku něco dočtou.

Dvojfaktoriál čísla n — píšeme $n!!$ — se definuje pro každé přirozené číslo n v závislosti na tom, zda je sudé nebo liché:

$$n!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot n \quad \text{- pro } n \text{ sudé,}$$

$$n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot n \quad \text{- pro } n \text{ liché.}$$

Symbol $n!!$ neznamená tedy totéž co symbol $(n!)!$ — čísla $n!!$ a $(n!)!$ jsou různá pro všechna přirozená čísla $n \geq 3$.

V následujících řádcích dokážeme tři nerovnosti, v nichž dvojfaktoriál vystupuje. Při důkazu prvních dvou použijeme známou AG nerovnost, tj. nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem:

Aritmetický průměr libovolných nezáporných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *je větší nebo roven jejich průměru geometrickému:*

$$\frac{1}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\ .$$

První nerovností, kterou se budeme zabývat, je nerovnost

$$(2n)!! \leq (n+1)^n\ ,$$

o které dokážeme, že platí pro všechna přirozená čísla n.

Její důkaz je velmi snadný, uvědomíme-li si, že podle AG nerovnosti pro n nezáporných čísel $2, 4, 6, \ldots, 2n$ platí

$$\sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \leq \frac{1}{n} \cdot (2 + 4 + 6 + \cdots + 2n) .$$

Protože však

$$\frac{1}{n} \cdot (2 + 4 + 6 + \cdots + 2n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} \cdot (2n + 2) = n + 1 ,$$

dostaneme odtud

$$\sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \leq n + 1 ,$$

což po umocnění dá dokazovanou nerovnost

$$(2n)!! \leq (n + 1)^n .$$

Ukážeme nyní, že podobný odhad má i číslo $(2n - 1)!!$, neboť pro všechna přirozená čísla n platí

$$(2n - 1)!! \leq n^n .$$

Analogicky s předcházejícím vyjdeme z AG nerovnosti pro n nezáporných čísel $1, 3, 5, \ldots, 2n - 1$, tj. z nerovnosti

$$\sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)} \leq \frac{1}{n} \cdot (1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1))$$

neboli z nerovnosti

$$\sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} \cdot 2n = n ,$$

odkud dostaneme dokazovanou nerovnost umocněním:

$$(2n - 1)!! \leq n^n .$$

Poslední vztah pro dvojfaktoriály, který dokážeme, je pozoruhodná nerovnost

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$$

která — stejně jako nerovnosti předcházející — platí pro všechna přirozená čísla n. Dokážeme ji matematickou indukcí.

Vzhledem k tomu, že pro $n = 1$ tato nerovnost platí, stačí dokázat, že z předpokladu

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \tag{1}$$

vyplývá platnost nerovnosti

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}.$$

Platí-li tedy (1), je také

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Dokážeme-li nyní, že platí nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}},$$

budeme hotovi. To však je poměrně jednoduché, neboť tato poslední nerovnost je ekvivalentní s nerovnostmi

$$(2n+1) \cdot \sqrt{3n+4} \leq (2n+2) \cdot \sqrt{3n+1}$$
$$(2n+1)^2 \cdot (3n+4) \leq (2n+2)^2 \cdot (3n+1)$$
$$12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4,$$

přičemž poslední z nich platí, neboť číslo n je kladné. Tím je dokázáno, že pro všechna přirozená čísla n platí nerovnost

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$$

kterou můžeme psát ve tvaru

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} .$$

Na tuto nerovnost jsem si po řadě marných pokusů vzpomněl, když jsem od studentů „dostal za domácí úkol“ dokázat, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$\binom{2n}{n} \cdot \sqrt{3n} < 4^n .$$

Na myšlenku ji použít mě přivedla podobnost výrazů $\sqrt{3n}$ a $\sqrt{3n+1}$, které se v těchto nerovnostech vyskytují. Poměrně jednoduchými úpravami, které mohu na požádání i předvést, se dá kombinační číslo $\binom{2n}{n}$ převést na tvar

$$\frac{4^n \cdot (2n-1)!!}{(2n)!!} ,$$

odkud s použitím nerovnosti dokázané výše plyne

$$\frac{4^n \cdot (2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}} .$$

Je tedy

$$\binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}} ,$$

odkud už snadno dostaneme, že platí

$$\binom{2n}{n} \cdot \sqrt{3n} < 4^n .$$

Není zkrátka nad to, když si člověk na to, co někdy viděl, dokáže i vzpomenout. S postupujícími léty je to ovšem čím dál tím těžší.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
email: calda@karlin.mff.cuni.cz