Renata Sikorová

Od úrokového počtu k číslu e (1)

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 3, 136–141

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150884`

OD ÚROKOVÉHO POČTU K ČÍSLU e (1)

RENATA SIKOROVÁ

Pro každou vědu je velmi důležité analyzovat svoji historii. Přestože moderní trendy stále více inklinují k humanitním vědám, historie matematiky zůstává stále přitažlivá. „Základní pravdy" vyslovené před stovkami i tisíci let se nemění a pořád nás uchvacují svou krásou, stejně jako uchvacovaly všechna předcházející pokolení. S čísly lidé zápasili vlastně již od doby, kdy se začala zaznamenávat historie. Mezi ty nejzajímavější patří trojice čísel: π, zlatý řez a e.

Zatímco historie čísla π a zlatého řezu sahá až do starověku, historie e překlenula teprve asi čtyři století. Přestože má číslo e obrovský význam nejen pro matematiku, ale i spoustu věd příbuzných (fyzika, astronomie, ...), bývá u studentů nejhůře pochopitelné a nejméně oblíbené. Je to škoda, protože existuje mnoho způsobů, jak se s tímto číslem lépe seznámit. V sérii článků, které budou vycházet v Učiteli matematiky, se postupně s některými z nich seznámíme.

Nejprve se zaměříme na problematiku, která provází lidstvo již od nepaměti. Jsou jí finanční záležitosti. Budeme se zabývat velmi důležitou oblastí ve finančnictví: úrokovým počtem.

Úrok, jak všichni dobře víme, je poplatek za půjčení peněz. Zvyk účtovat tento poplatek sahá do počátků zaznamenávání historie; již v nejstarších nám známých matematických textech nalezneme úlohy, které se týkají úroků. Například na hliněné destičce z Mezopotámie, datované kolem roku 1700 př.n.l. (nyní se nachází v Louvru), najdeme následující problém: „Kapitál v hodnotě 1 gur byl půjčen na úrok rovný jedné pětině ročně. Za jakou dobu se kapitál zdvojnásobí?"[3]; viz např. [Ko]. Protože se úrok z kapitálu na konci každého roku přidává k hotovosti, aby v dalších letech opět přinášel úroky, říká se, že jde o *složené úrokování.*

---

[3]Gur byl mezopotámskou jednotkou pro objem sypkých hmot. Činil přibližně 0,3m^3; stejným názvem se označovala i jednotka měny.

Zapišme tento problém matematicky. Víme, že na konci každého roku suma vzroste o jednu pětinu, tj. částku vynásobíme činitelem 1,2. Když původní částku označíme P, budeme mít na konci prvního roku kapitál $1{,}2 \cdot P$, na konci druhého roku $1{,}2 \cdot \cdot (1{,}2 \cdot P) = (1{,}2)^2 \cdot P$, a po x letech $(1{,}2)^x \cdot P$. Protože suma se má oproti původní částce zdvojnásobit, máme $(1{,}2)^x \cdot P = 2 \cdot P$ a dostáváme se k rovnici $(1{,}2)^x = 2$. Všimněme si, že původní částka se v rovnosti nevyskytuje.

Vyřešit tuto rovnici pro nás neznamená žádný problém. Použijeme logaritmy a dostáváme:

$$\log(1{,}2)^x = \log 2$$

$$x \log 1{,}2 = \log 2$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}2} \doteq 3{,}8018$$

Logaritmy ovšem Babylóňané neznali. Přesto byli schopni najít přibližné řešení. Jak? Všimli si, že $(1{,}2)^3 = 1{,}728$ je menší než 2, zatímco $(1{,}2)^4 = 2{,}0736$ je větší než 2; takže x musí mít hodnotu mezi 3 a 4. K zúžení intervalu používali postup dnes známý jako lineární interpolace, tj. nalezení čísla, které rozděluje interval od 3 do 4 ve stejném poměru jako dvojka rozděluje interval od 1,728 do 2,0736. Tato myšlenka vede k lineární rovnici pro x, která se dá jednoduše vyřešit pomocí elementární algebry. Bohužel Babylóňané neznali naše moderní algebraické metody a nalezení potřebných hodnot pro ně nebylo tak jednoduché. Přesto jejich řešení $x = 3{,}7870$, což jsou asi 3 roky, 9 měsíců a 13 dnů, se jen málo liší od správné hodnoty 3,8018 (asi 3 roky, 9 měsíců a 18 dnů).[4]

K výpočtům používali Babylóňané jistý druh tabulek. Svědčí o tom zachovalé hliněné destičky, na nichž je seznam prvních deseti mocnin čísel 1/36, 1/16, 9 a 16. Zdá se, že tyto tabulky nebyly

---

[4] Pro zajímavost uveďme, že Babylóňané nepoužívali desítkový systém (ten se začal používat až v raném středověku), ale systém šedesátkový. Řešení problému bylo na hliněné destičce zapsáno jako 3;47,13,20, což je $3 + 47/60 + + 13/60^2 + 20/60^3$ (tedy přibližně 3,7870).

určeny k obecnějšímu použití, sloužily pouze ke konkrétnímu účelu, jakým bylo složené úrokování.

My se na chvíli u složeného úrokování zastavíme. Pokusíme se z výše uvedeného příkladu vyvodit, co se stane v obecném případě. Předpokládejme, že vložíme základní částku P na konto, které vyplácí roční r–procentní úrok počítaný složeným úrokováním (při počítání budeme vyjadřovat r jako desetinné číslo, např. 0,05 místo 5%). To znamená, že na konci prvního roku bude náš kapitál činit $(1+r)P$, na konci druhého roku $(1+r)^2P$, a tak až po t letech budeme mít na kontě $(1+r)^tP$. Když označíme toto množství S, dostaneme:

$$S = (1+r)^tP. \qquad (1)$$

Tato formule je základem prakticky všech finančních kalkulací, ať už se jedná o bankovní konta, půjčky, hypotéky či anuity (pravidelná splátka dluhu).

Některé banky však počítají úroky ne jednou, ale několikrát za rok. Jak ale vypočítat úroky pro část roku? Uvažujme následující problém: „Vložíme 100 na konto s 20% úrokem. Jaký kapitál budeme mít na kontě za $2\frac{1}{2}$ roku, když počítáme i úroky z úroků?“ Tuto úlohu řešili již v 16. století TARTAGLIA (1500 – 1557) a GIERONIMO CARDANO (1501 – 1576); viz např. [Wa]. Shodně s nimi předpokládejme, že kapitál naroste za půl roku na 110; vezmeme polovinu ročního úrokového podílu a použijeme ji jako sazbu za toto období. Pak ovšem vezmeme tuto částku a použijeme ji jako základ pro úrokování na další půlrok. Po roce tedy budeme mít částku 121. Snadno nahlédneme, že k výpočtu částky po $2\frac{1}{2}$ roce lze použít vzorce (1), kde položíme $P = 100$, $r = 0,1$, protože polovina ročního úrokového podílu je 10%, a $t = 5$, protože máme 5 půlročních úrokovacích období. Po $2\frac{1}{2}$ roce budeme tedy vlastnit asi 161.[5]

[5]Tartaglia a Cardano udělali ve výpočtu chybu. Počítali totiž s částkou 120 za 1 rok (zapomněli na úroky z úroků), za dva roky tedy měli 144, za tři $172\frac{4}{5}$. Pak se jejich cesty rozešly: Tartaglia počítal kapitál x po $2\frac{1}{2}$ roce ze vztahu $100 : 110 = 144 : x$ a došel k výsledku $x = 158\frac{2}{5}$, zatímco Cardano použil vztah $110 : 100 = 172\frac{4}{5} : x$ a došel k $157\frac{1}{11}$.

V bankovním průmyslu lze najít všechny druhy úrokovacích schémat: roční, půlroční, čtvrtletní, týdenní i denní. Předpokládejme, že úrokování probíhá n krát ročně. Pro každé „poměrné období" banka používá roční úrokový podíl *dělený číslem n*, tj. r/n. Protože za t let máme nt poměrných období, základ P se po t letech zvedne na

$$S = (1 + r/n)^{nt}P. \tag{2}$$

Samozřejmě vzorec (1) je zvláštním případem (2), když položíme $n = 1$.

Bylo by zajímavé srovnat částky peněz získané ze stejného základu po jednom roce pro různá úrokovací období, když předpokládáme stejný roční úrokový podíl. K tomuto účelu použijeme následující příklad: částka $P = 100$ na kontě s $r = 5\% = 0{,}05$ ročním úrokovým podílem. Budeme dosazovat do vztahu (2) a pro různá poměrná období zapisovat výsledky do tabulky.

poměrné období	n	r/n	S
roční	1	0,05	105,00
půlroční	2	0,025	105,06
kvartální	4	0,0125	105,09
měsíční	12	0,004166	105,12
týdenní	52	0,0009615	105,12
denní	365	0,0001370	105,13

Je docela překvapující, že částka 100 úrokovaná denně vynáší právě o 13 setin více než úrokovaná ročně, a asi o jednu setinu více než úrokovaná měsíčně nebo týdně. Nejsou to žádné velké rozdíly. Ale pozor, záleží na tom, jak velký byl základ: investujeme-li např. 1 000 000, je rozdíl mezi ročním a denním úrokováním 1267,50, a to už je lepší.

Tak jsme si připravili půdu pro to, abychom se konečně dostali k jádru věci, tj. k číslu e. Uvažujme tedy speciální případ rovnosti (2), případ, kdy $r = 1$. Znamená to roční úrokový podíl 100%. Ovšem s tak štědrou nabídkou se nevynoří žádná banka, i když v době současného tunelování a krachů se dá očekávat téměř cokoli. Nicméně to, co my máme na mysli, se netýká aktuální situace, ale je to hypotetický případ, který má dalekosáhlé matematické důsledky. Pro další zjednodušení předpokládejme, že $P = 1$ a $t = 1$ rok. Dosadíme do rovnosti (2) a obdržíme

$$S = (1 + 1/n)^n. \tag{3}$$

Naším cílem je prozkoumat hodnoty tohoto výrazu pro rostoucí přirozené číslo n. Zapíšeme je do následující tabulky:

n	$(1+1/n)^n$	n	$(1+1/n)^n$
1	2	100	2,70481383
2	2,25	1 000	2,71692393
3	2,37037	10 000	2,71814593
4	2,44140625	100 000	2,71826827
5	2,48832000	1 000 000	2,71828047
10	2,59374246	10 000 000	2,71828169
50	2,69158802	100 000 000	2,71828181

Vypadá to, že jakýkoli další růst n neovlivní příliš výsledek; změny nastávají na stále méně významných desetinných místech. Je ovšem možné, že nezáleží na tom, jak je n velké, a hodnoty $(1 + 1/n)^n$ se „ustálí" někde okolo čísla 2,71828? Každý, kdo se seznámil se základy vyšší matematiky, ví, že této vágní formulaci lze dát přesný význam. Limitou výrazu $(1 + 1/n)^n$ pro n jdoucí do nekonečna je číslo e.

Není známo, kdo si jako první všiml zvláštního chování výrazu $(1 + 1/n)^n$ pro n rostoucí do nekonečna. Je pravděpodobné, že to bylo počátkem 17. století, kdy došlo ke zrodu prvních logaritmických tabulek. S ním je spojena trojice jmen: skotský šlechtic JOHN NAPIER (1550 - 1617), švýcarský jemný mechanik a hodinář JOOST BÜRGI (1552 - 1632) a anglický matematik HENRY BRIGGS (1561 - 1630). Napier byl tvůrcem tabulek, jež obsahovaly prvních 100 členů geometrické posloupnosti s prvním členem 10^7 a kvocientem $(1 - 10^{-7})$. Jeho logaritmy byly založeny na spojitém pohybu a lze je považovat za předchůdce dnešních logaritmů. Nesplňují totiž ještě podmínku obecných logaritmů, tj.

$$\log xy = \log x + \log y.$$

Logaritmy v dnešním smyslu byly dílem Bürgiho (logaritmy o základu $(1+10^{-4})^{10^4}$) a Briggse, jenž po diskusi s Napierem dospěl k logaritmům o základu 10.

První nepřímý odkaz na číslo e se nachází v [Na], kde se objevila poznámka, která je ekvivalentní dnešnímu zápisu $\log_e 10 = 2{,}302585$; viz např. [Sm]. Ovšem do povědomí matematiků se číslo e dostalo až díky švýcarskému matematikovi LEONHARDU EULEROVI (1707 – 1783). Euler nalezl e v souvislosti se zaváděním exponenciální a logaritmické funkce; viz např. [Ve]. Na jeho počest je toto číslo označováno písmenem „e“ a nazýváno Eulerovým číslem.

V příštím pokračování nazvaném *Číslo e a hyperbola* uvidíme, že i otázky, které nesouvisejí se složeným úrokováním, mohou vést ke stejnému číslu.

POUŽITÁ LITERATURA

[Ed] C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer, New York, 1979.

[Ko] A. G. Konforovič, *Významné matematické úlohy*, překlad J. Šedivý, SPN, Praha, 1989.

[Ma] Eli Maor, *The Story of a Number*, Princeton University Press, Princeton, 1994.

[Na] John Napier, *A Description of the Admirable Table of Logarithms*, překlad Wright (1616), Da Capo Press, Amsterdam, 1969.

[Ru] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

[Sm] David Eugene Smith, *History of Mathematics*, Dover, New York, 1958.

[Ve] Jiří Veselý, *Matematická analýza pro učitele*, První díl, Matfyzpress, Praha, 1997.

[Wa] Wolfgang Walter, *Analysis I*, Springer, Berlin, 1990.