Renata Sikorová
Číslo e a jeho vlastnosti (3)

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 1, 19–24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150871

ČÍSLO e A JEHO VLASTNOSTI (3)

RENATA SIKOROVÁ

V tomto článku chceme čtenáře blíže seznámit s Eulerovým číslem e a jeho vlastnostmi. Kdo pozorně četl články [S1] a [S2], měl možnost sledovat, jaké souvislosti vedly k objevení čísla e. Řešili jsme dva zcela odlišné problémy, první z nich se týkal finanční matematiky, druhý byl problémem geometrickým. Naším dalším úkolem bude ukázat, jak se přistupuje k číslu e dnes.

V [S1] jsme dospěli k výrazu $(1 + 1/n)^n$ a předeslali jsme, že tento výraz má limitu pro $n \to \infty$. Tato limita je v matematice označována e. Je to jedna z možných definic čísla e. Z matematického hlediska by bylo správné ukázat existenci výše uvedené limity. Proto se na chvíli u tohoto problému zastavíme. Využijeme některé známé poznatky z matematické analýzy. Jedná se především o chování monotónní omezené posloupnosti:

Věta 1. *Nechť je dána neklesající posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *kde je* $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$. *Je-li tato posloupnost shora omezená, existuje* $a \in \mathbb{R}$ *tak, že*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

Budeme též potřebovat klasickou nerovnost mezi *aritmetickým průměrem* n nezáporných čísel $(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$ a jejich *geometrickým průměrem* $(x_1x_2\ldots x_n)^{1/n}$. Nerovnost zapíšeme v méně obvyklém, avšak z matematického hlediska jednodušším tvaru bez n-té odmocniny:

Lemma (AG-nerovnost). *Nechť je* $n \in \mathbb{N}$ *a nechť jsou* x_k, *kde* $k = 1, 2, \ldots, n$, *nezáporná reálná čísla. Potom platí :*

$$x_1x_2\ldots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n, \qquad (1)$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Důkazy obou tvrzení naleznete např. ve [Ve].

Nyní již máme potřebný matematický aparát, abychom mohli vyslovit následující tvrzení:

Věta 2. *Položme:*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad n = 1, 2, \dots .$$

Pak je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *rostoucí a posloupnost* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *klesající.*

Řešení. Důkaz Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je podle definice rostoucí právě tehdy, když pro každé n je $a_n < a_{n+1}$. Důkaz provedeme pomocí AG–nerovnosti, kterou použijeme na součin n činitelů $(1 + 1/n)$ a 1. Budeme mít

$$x_1 x_2 \dots x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

a dále

$$\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Na základě AG-nerovnosti platí $(1 + 1/n)^n \leq (1 + 1/(n+1))^{n+1}$, přičemž podmínka pro rovnost není splněna. Odtud pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostáváme:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} .$$

Tedy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost.

Nyní položíme $x_1 = x_2 \dots = x_n = 1 + 1/(n+1)$, $x_{n+1} = (1 + {} + 1/(n+1))^2$. Potom

$$x_1 x_2 \dots x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \tag{2}$$

a

$$\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n\frac{n+2}{n+1} + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2}{n+1} := M_{n+1} .$$

Po jednoduché úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \frac{(n+1)^3 + (n+1)^2 + (n+1) + 1}{(n+1)^3} = \\ &= 1 + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3}\right] \leq \qquad (3) \\ \leq 1 + &\underbrace{\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots + \frac{1}{(n+1)^k} + \dots\right]}_{\text{geometrická řada s kvocientem } \frac{1}{n+1}} = \\ &= 1 + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ze vztahů (2), (3) a AG-nerovnosti vyplývá $1 + 1/(n+1))^{n+2} \leq \leq (1 + 1/n)^{n+1}$, podmínka rovnosti opět není splněna. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostáváme:

$$b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \, .$$

Tedy $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost. Tímto je důkaz věty hotov.

Zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = (1+1/n)^n < (1+1/n)^{n+1} = b_n$, a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_n \leq b_1 = 4$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy shora omezená a podle předchozí věty také rostoucí. Už víme, že posloupnost s takovými vlastnostmi má konečnou limitu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ,$$

kterou jsme již dříve označili e. Dále si všimněme, že pro b_n můžeme psát

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \, .$$

Tedy

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

a vzhledem k tomu, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$) je rostoucí (klesající) posloupnost, pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n\,. \tag{4}$$

Nerovnosti (4) poskytují možnost určit přibližně hodnotu čísla e, např. pro $n = 1$ dostaneme $2 < e < 4$, pro $n = 2$ podobně $9/4 < < e < 27/8$ atd. Nyní ještě zodpovíme otázku, s jakou přesností lze pomocí tohoto postupu spočítat hodnotu čísla e. Odpověď dává:

$$e - a_n < b_n - a_n = \frac{a_n}{n} < \frac{b_1}{n} = 4/n\,.$$

Snadno se lze přesvědčit, že určování hodnoty e tímto způsobem je velmi pomalé. (Pokuste se např. určit e s přesností na $1/1000$. Jak velké n budete k tomuto účelu potřebovat?) Proto si nyní ukážeme jiný způsob vyjádření tohoto čísla.

Budeme uvažovat výraz $(1 + 1/n)^n$. Umocníme jej pomocí binomické formule:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \\ + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{(1-\frac{1}{n})}{2!} + \frac{(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})}{3!} + \cdots + \frac{1}{n^n} < \\ < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

takže při označení $e := \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ z uvedeného plyne nerovnost $e \le \sum_{k=0}^{\infty}(1/k!)$. Dokážeme ještě obrácenou nerovnost a tím získáme vyjádření e pomocí řady. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$ a platí:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1+1+\frac{(1-\frac{1}{n})}{2!}+ + \cdots + \frac{(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{m-1}{n})}{m!}.$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme pro každé $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}$$

a dále pro $m \to \infty$ dostaneme $e \ge \sum_{k=0}^{\infty}(1/k!)$. Platí tedy

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Nyní si ukážeme, v čem tkví výhoda počítání e tímto způsobem. K tomuto účelu označme

$$s_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}. \tag{5}$$

Snadno nahlédneme, že pro $n > k$ je $s_n > s_k$, můžeme tedy psát

$$s_n = s_k + r_{k,n}, \tag{6}$$

kde

$$r_{k,n} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots+ \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots(n-1)n}\right).$$

Nyní $r_{k,n}$ odhadneme shora, a to tak, že všechny výrazy v závorkách nahradíme $k+1$, je totiž $1/(k+2) \le 1/(k+1)$, atd. Dostaneme

$$r_{k,n} \le \frac{1}{k!}\sum_{m=1}^{n-k}\frac{1}{(k+1)^m}.$$

Na pravé straně dostáváme členy geometrické řady, takže

$$r_{k,n} \leq \frac{1}{k!}\frac{1}{k+1}\frac{1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{n-k}}{1-\frac{1}{k+1}} < \frac{1}{kk!}.$$

Podle (6) je proto $s_n \leq s_k + 1/(k.k!)$. Vtip je v tom, že pro všechna čísla s_n od $(k+1)$-vého počínaje, tj. pro $s_{k+1}, s_{k+2}, s_{k+3}, \dots$, dostáváme tutéž nerovnost, neboť pravá strana nezávisí na n. A proto také $e \leq s_k + 1/(k.k!)$. Pro každé celé $k \geq 3$ je tedy

$$s_k \leq e \leq s_k + \frac{1}{k.k!},$$

tj.

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) \leq \frac{1}{k.k!}.$$

Protože pro rostoucí k hodnota $\frac{1}{k.k!}$ velmi rychle konverguje k nule, lze takto číslo e velmi pohodlně počítat. Např. $\frac{1}{10.10!} < \frac{3}{10^8}$; odtud vypočteme e s chybou menší než 10^{-7}. Pro $k = 14$ dostáváme číslo e s chybou menší než 10^{-12}; přibližná hodnota e bude 2.71828182845...

Dokončení v příštím čísle

LITERATURA

[S1] Renata Sikorová, *Od úrokového počtu k číslu e*, Učitel matematiky **8** (1999), 136–141.

[S2] Renata Sikorová, *Číslo e a hyperbola*, Učitel matematiky **8** (1999), 193–202.

[Ve] Jiří Veselý, *Matematická analýza pro učitele*, První díl, Matfyzpress, Praha, 1997.

Mgr. Renata Sikorová

doktorandka Katedry matematické analýzy MFF UK

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

email: sikorova@karlin.mff.cuni.cz