

Pavel Leischner

Čtyřstěny s trojúhelníkovou sítí (2)

*Učitel matematiky*, Vol. 11 (2003), No. 4, 204–217

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150859>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2003

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ČTYŘSTĚNY S TROJÚHELNÍKOVOU SÍTÍ (2)

PAVEL LEISCHNER<sup>1</sup>

V minulém čísle jsme našli všechny typy čtyřstěnů, ke kterým existuje síť tvaru pravoúhelníku. Stačily k tomu poznatky ze základní školy. Vyšetřování čtyřstěnů s trojúhelníkovou sítí je složitější, vhodné pro středoškoláky. Pokud již studenti znají kritérium existence čtyřstěnu, které připomeneme v následujícím odstavci, mohou s využitím dynamické geometrie snadno celou situaci experimentálně prozkoumat a učinit příslušné závěry. Jejich důkazy budou asi vyžadovat pomoc učitele. Jsou pěknou příležitostí k procvičení metody souřadnic, řešení goniometrických rovnic a umění vypočítat souvislosti z obrázku. Důkazy zde budeme provádět na středoškolské úrovni. To především znamená, že nebudeme dokazovat monotonnost funkcí, ale přijmeme ji jako zřejmou z pozorování.

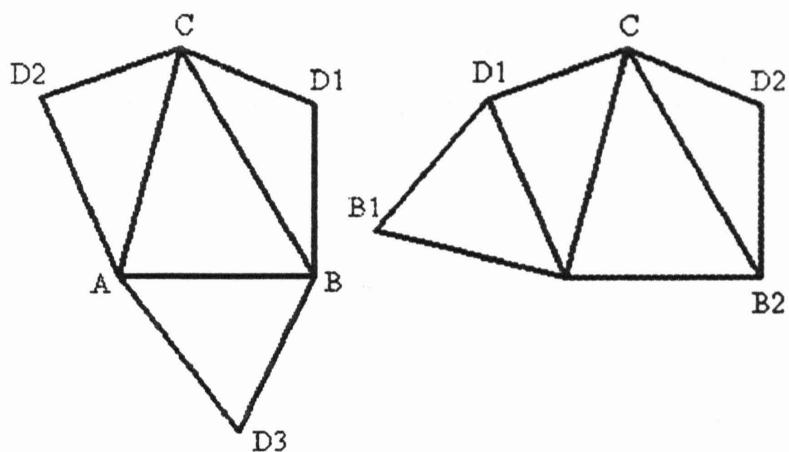
Z předešlého článku použijeme kritérium existence čtyřstěnu s danou sítí:

Konfigurace čtyř trojúhelníků na obr. 1 jsou sítě (existujícího) čtyřstěnu právě tehdy, když jsou splněny tyto dvě podmínky:

- (a) (*Podmínka hran*) Strany sítě, jejichž krajní body jsou (až na případný index) označeny stejnými písmeny, mají stejnou délku.
- (b) (*Podmínka úhlů*) Každá z velikostí tří úhlů, které se stýkají při některém vrcholu třetího druhu, je menší než polovina součtu těchto tří velikostí.

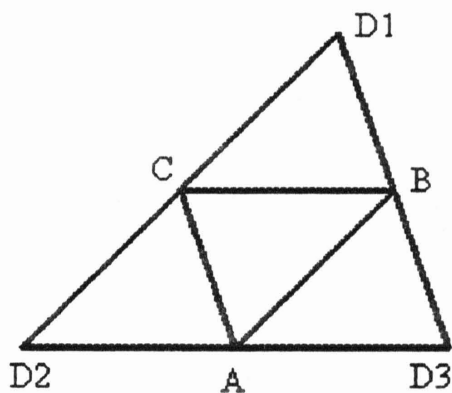
Připomeňme, že hranami zde nazýváme společné strany trojúhelníků sítě. Ostatní strany trojúhelníků sítě se nazývají strany sítě. Každá ze sítí na obr. 1 má tři hrany a šest stran. Pokud

<sup>1</sup>Tato práce byla podporována grantem MSM 124 100006



Obr. 1

nemá síť čtyřstěnu tvar šestiúhelníku, jsou některé strany obrazce ohraničujícího síť sjednocením několika stran sítě. Vrchol sítě je  $n$ -tého druhu, je-li společný  $n$  trojúhelníkům (budoucím stěnám čtyřstěnu). Je-li  $n = 1$  (resp.  $n > 1$ ), hovoříme o jednoduchém (resp. složeném) vrcholu.

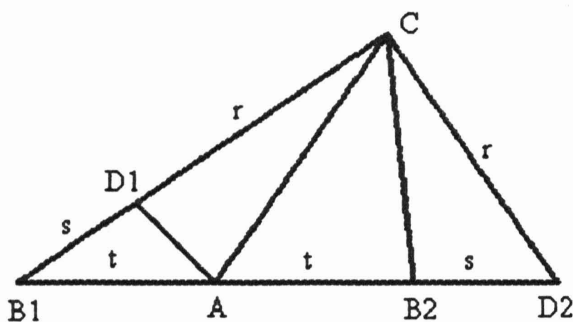


Obr. 2

Čtyřstěny s trojúhelníkovou sítí prvního typu nalezneme snadno. Při označení podle obr. 2 je podmínka hran splněna právě tehdy, když body  $A, B$  a  $C$  leží ve středech stran  $D_2D_3, D_3D_1$  a

$D_1D_2$ . Pak jsou ovšem trojúhelníky  $ABC$ ,  $BAD_3$ ,  $D_1CB$ ,  $CD_2A$  navzájem shodné. Má-li platit podmínka úhlů, jsou také ostroúhlé. Příslušné *shodnostěnné čtyřstěny* tedy mají síť tvaru ostroúhlého trojúhelníku  $D_1D_2D_3$  a vrcholy  $A$ ,  $B$  a  $C$  leží po řadě ve středech stran  $D_2D_3$ ,  $D_3D_1$  a  $D_1D_2$ .

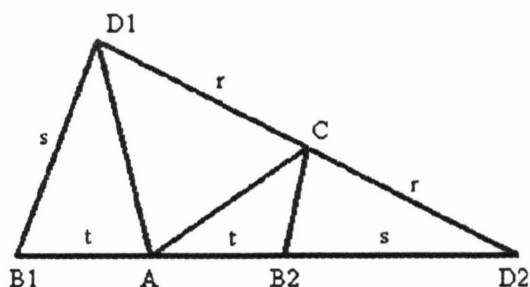
Trojúhelník tvořící síť druhého typu má dva vrcholy jednoduché a třetí je buď třetího nebo druhého druhu. V prvním případě, můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat trojúhelník  $B_1D_2C$  (obr. 3), ve druhém trojúhelník  $B_1D_2D_1$  na obr. 4. Z obrázků vidíme, že při splnění podmínky hran nemůže být trojúhelník ohraničující síť čtyřstěnu rovnostranný.



Obr. 3

Dále se budeme zabývat jen sítěmi tvaru rovnoramenného trojúhelníku. Trojúhelník  $B_1D_2C$  na obr. 3 nemůže být rovnoramenný s hlavním vrcholem  $C$ , protože je  $s > 0$ . Ani bod  $D_1$  na obr. 4 nemůže být hlavním vrcholem sítě tvaru rovnoramenného trojúhelníku  $B_1D_2D_1$ . Kdyby tomu tak bylo, byl by úhel  $B_1AD_1$  tupý a neplatila by podmínka úhlů. Bod  $A$  by totiž ležel uvnitř Thaletovy kružnice s průměrem  $B_1D_1$ , neboť zřejmě  $|B_1A| < |AD_2|$ . Kružnice, jejíž průměr je totožný s ramenem rovnoramenného trojúhelníku, však prochází středem základny.

Z předchozího vidíme, že se stačí omezit na situace kdy má hraniční trojúhelník sítě složený vrchol při základně. Kromě toho, zda je tento vrchol druhého, či třetího druhu, musíme ještě rozlišit,



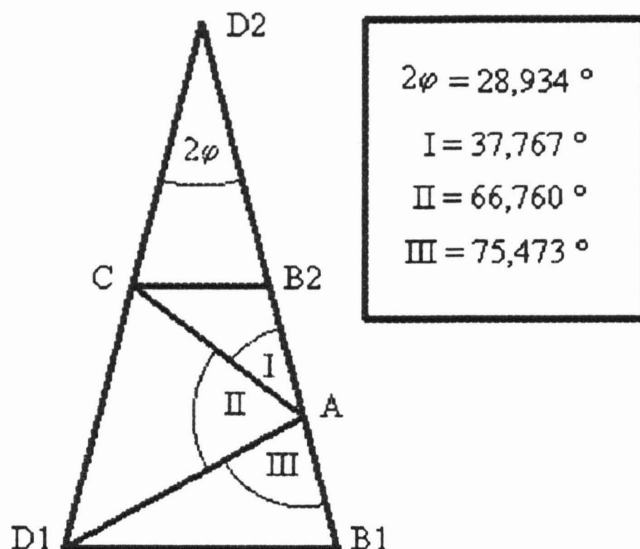
Obr. 4

který ze zbývajících vrcholů  $B_1$ ,  $D_2$  je hlavní. Celkem nastávají čtyři situace:

**1. Rovnoramenný trojúhelník  $D_1B_1D_2$  s hlavním vrcholem  $D_2$ .**

Dynamický obrázek, který byl použit v Cabri geometrii k průzkumu tohoto případu, je znázorněn na obr. 5. Při zachování podmínky hran umožňuje měnit jednak velikost základny  $D_1B_1$ , jednak výšku pohybem bodu  $D_2$  po skryté ose základny. I když k vytvoření takové pomůcky stačí základní znalosti práce s Cabri, popíšeme si aspoň zde postup konstrukce: Nejprve byla sestrojena úsečka  $D_1B_1$  a její osa. Na této ose jsme zvolili bod  $D_2$  tak, aby platilo  $|B_1D_2| > |B_1D_1|$ , a sestrojili kružnici  $k(D_1, |D_1B_1|)$ . Průsečík úsečky  $D_2B_1$  s obrazem této kružnice v posunutí o vektor  $D_1D_2$  je  $B_2$ . Dále jsme sestrojili středy  $A$ ,  $C$  úseček  $B_1B_2$ ,  $D_1D_2$  a hrany  $D_1A$ ,  $AC$ ,  $CB_2$ , nakonec zobrazili velikosti zkoumaných úhlů. Nepotřebné čáry jsou skryty.

Nyní již můžeme pohybovat bodem  $D_2$  při zvolené základně  $D_1B_1$  a pozorovat, jak závisí velikosti úhlů při vrcholu  $A$  na velikosti  $\varphi = |\sphericalangle D_1D_2B_1|/2$ . Zjistíme, že obrázek je definován jen pro  $\varphi < 30^\circ$ . To je však zřejmé z konstrukce. Při snižování  $\varphi$  od limitní hodnoty  $30^\circ$  k nule vidíme, že je úhel  $D_2AC$  stále ostrý, velikost úhlu  $CAD_1$  roste od třiceti stupňů a  $|\sphericalangle D_1AB_1|$  klesá od  $120^\circ$ . Devadesáti stupňů dosáhne nejprve úhel  $D_1AB_1$  pro  $\varphi = \varphi_1 \doteq 18,0^\circ$ , potom úhel  $CAD_1$  pro  $\varphi = \varphi_2 \doteq 9,6^\circ$ .



Obr. 5

Podmínka úhlů při vrcholu  $A$  je tedy splněna právě tehdy, když  $\varphi_2 < \varphi < \varphi_1$ .

Pozorovaná fakta nyní (až na monotonnost) dokážeme. Z obr. 5 snadno zjistíme, že  $|D_2C| = |B_1D_2|/2 < |D_2A|$ . V trojúhelníku  $CAD_2$  leží úhel  $D_2AC$  proti kratší straně  $D_2C$  a z toho důvodu je ostrý.

Hledejme nyní, pro která  $\varphi$  je úhel  $D_1AB_1$  pravý. Na obr. 6 jsou trojúhelníky  $D_1B_1A$  a  $D_1B_2A$  shodné. Odtud  $|B_1D_1| = |D_1B_2| = |B_2D_2|$ . V trojúhelníku  $D_2D_1B_2$  dostáváme

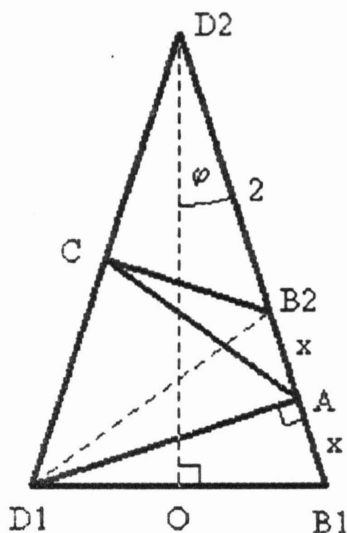
$$|\sphericalangle D_2D_1B_2| = |\sphericalangle B_2D_2D_1| = 2\varphi,$$

odtud dále

$$|\sphericalangle B_1D_1D_2| = |\sphericalangle D_1B_1D_2| = |\sphericalangle B_1B_2D_1| = 4\varphi$$

a nakonec ze součtu úhlů v trojúhelníku  $D_1B_1D_2$

$$10\varphi = 180^\circ, \quad \varphi = \varphi_1 = 18^\circ.$$



Obr. 6

Ukažme si ještě jiný postup, při kterém najdeme strany trojúhelníku  $D_1B_1D_2$  a zároveň nalezneme přesný vztah pro  $\sin 18^\circ$ . Označme  $O$  střed strany  $D_1B_1$  a položme  $|D_2B_2| = 2 = |D_1B_1|$  a  $|AB_1| = |AB_2| = x$  (obr. 6). Z podobnosti trojúhelníků  $D_1B_1A$  a  $D_2B_1O$  dostáváme

$$\frac{x}{1} = \frac{2}{2 + 2x}$$

Vztah upravíme na kvadratickou rovnici

$$x^2 + x - 1 = 0$$

s jediným kladným kořenem

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Snadno odtud nahlédneme, že bod  $B_2$  dělí úsečku  $B_1D_2$  v poměru zlatého řezu a že vrcholy  $D_1$ ,  $B_1$  a  $D_2$  představují první, druhý a čtvrtý vrchol pravidelného pětiúhelníku. Z trojúhelníku  $D_1B_1A$

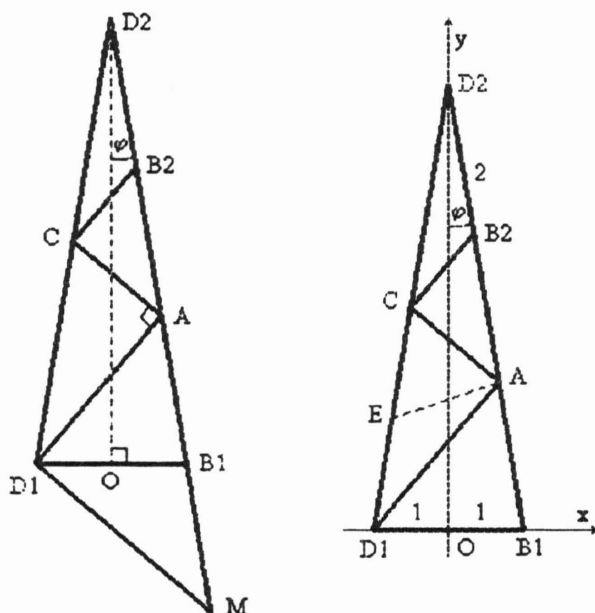
máme

$$\sin \varphi_1 = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \varphi_1 = 18^\circ.$$

Zabývejme se dále situací, kdy  $\angle D_1AC = 90^\circ$ . Ve shodě s levou částí obr. 7 označme  $M$  průnik polopřímky opačné k polo-přímce  $B_1A$  s kružnicí  $k(B_1, |B_1D_1|)$ . Pak je úsečka  $AC$  střední příčkou trojúhelníku  $D_1MD_2$  a je tedy rovnoběžná se stranou  $D_1M$ . Úhel  $AD_1M$  je pravý. Platí  $|D_1B_1| = |B_1M|$  a tak je bod  $B_1$  průsečíkem osy strany  $D_1M$  a přepony  $AM$  pravouhlého trojúhelníku  $AD_1M$ . Je tedy  $B_1$  střed kružnice opsané trojúhelníku  $AD_1M$ . Odtud

$$\begin{aligned} |D_1B_1| &= |MB_1| = |B_1A| = |AB_2| = |B_2D_2|, \\ |B_1D_2| &= 3|B_1D_1|. \end{aligned}$$

Tím je tvar trojúhelníku  $D_1B_1D_2$  určen. Z pravouhlého trojúhelníku  $OB_1D_2$  určíme  $\sin \varphi_2 = 1/6$ ,  $\varphi_2 \doteq 9,594^\circ$ ,  $2\varphi_2 \doteq 19,188^\circ$ .



Obr. 7

Planimetrii studenti obvykle moc neovládají, tak pro ně není



snadné objevit právě uvedený postup nalezení hodnoty  $\varphi_2$ . Delší, zato však jistá a pro středoškoláky dobře schůdná cesta, je založena na metodě souřadnic. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic  $(O, x, y)$  podle obr. 7 vpravo a označme  $E$  střed úsečky  $D_1C$ . Úhel  $CAD_1$  je pravý právě tehdy, když platí  $|EA| = |ED_1|$ . Pomocí obr. 7 postupně nalezneme:

$$\begin{aligned} B_1 &= [1, 0], & D_1 &= [-1, 0], & D_2 &= [0, \cot \varphi], \\ C &= \frac{D_1 + D_2}{2} = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{\cot \varphi}{2} \right], & E &= \frac{D_1 + C}{2} = \left[ -\frac{3}{4}, \frac{\cot \varphi}{4} \right], \\ B_2 &= [2 \sin \varphi, \cot \varphi - 2 \cos \varphi], \\ A &= \frac{B_1 + B_2}{2} = \left[ \frac{1 + 2 \sin \varphi}{2}, \frac{\cot \varphi - 2 \cos \varphi}{2} \right], \\ A - E &= \left[ \frac{5 + 4 \sin \varphi}{4}, \frac{\cot \varphi - 4 \cos \varphi}{4} \right], \\ |ED_1| &= \frac{|D_1 D_2|}{4} = \frac{1}{4 \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Nyní již z podmínky  $|EA|^2 = |ED_1|^2$  dostaneme

$$\left( \frac{5 + 4 \sin \varphi}{4} \right)^2 + \left( \frac{\cot \varphi - 4 \cos \varphi}{4} \right)^2 = \frac{1}{16 \sin^2 \varphi}.$$

Po úpravě obdržíme rovnici

$$\sin \varphi (6 \sin^2 \varphi + 5 \sin \varphi - 1) = 0,$$

jejíž vyřešením dospějeme k výše uvedenému výsledku.

**Závěr:** Síť čtyřstěnu  $ABCD$ , která má tvar rovnoramenného trojúhelníku  $D_1B_1D_2$  znázorněného na obr. 5 existuje právě tehdy, když pro podíl délky ramene a základny platí:

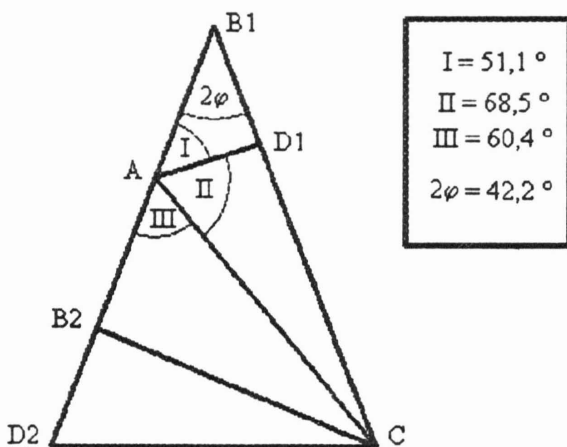
$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \frac{|D_1 D_2|}{|D_1 B_1|} < 3.$$

## 2. Rovnoramenný trojúhelník $D_1B_1D_2$ s hlavním vrcholem $B_1$ .

Sít ohraňčená takovým trojúhelníkem neexistuje, protože z podmínky hran a z podmínky  $|B_1D_1| = |B_1D_2|$  plyne  $|B_1B_2| = 0$ .

## 3. Rovnoramenný trojúhelník $D_2CB_1$ s hlavním vrcholem $B_1$ .

Dynamický obrázek v Cabri geometrii (viz obr. 8) vytvoříme analogicky výše uvedenému postupu. Pohybem bodu  $B_1$  nejprve experimentálně zjišťujeme, jak závisí velikosti úhlů při vrcholu  $A$  na  $\varphi = |\sphericalangle CB_1D_2|/2$ . Z podmínky hran vidíme, že  $|B_1C| > |D_1C| = |D_2C|$  a tedy  $\varphi < \varphi_1 = 30^\circ$ . Z pozorování plyne, že pro všechna  $\varphi < 30^\circ$  jsou úhly  $D_2AC$  a  $CAD_1$  ostré. Velikost úhlu  $D_1AB_1$  roste od nuly když  $\varphi$  klesá od  $30^\circ$ . Mezní situace  $|D_1AB_1| = 90^\circ$  nastane pro  $\varphi = \varphi_2 \doteq 18^\circ$ . Čtyřstěn tedy existuje pouze za podmínky  $\varphi_2 < \varphi < \varphi_1$ .



Obr. 8

Za účelem důkazu, že  $|CAD_2| < 90^\circ$  označme  $S$  střed úsečky  $B_1D_2$  a  $Q$  patu výšky z vrcholu  $C$  v trojúhelníku  $ACB_1$ . Víme, že  $|CB_1| > |D_2C|$ , a tak se  $Q$  nachází uvnitř úsečky  $D_2S$ , kdežto bod  $A$  je uvnitř úsečky  $SB_1$ . Úhel  $CAD_2$  je ostrý, protože leží

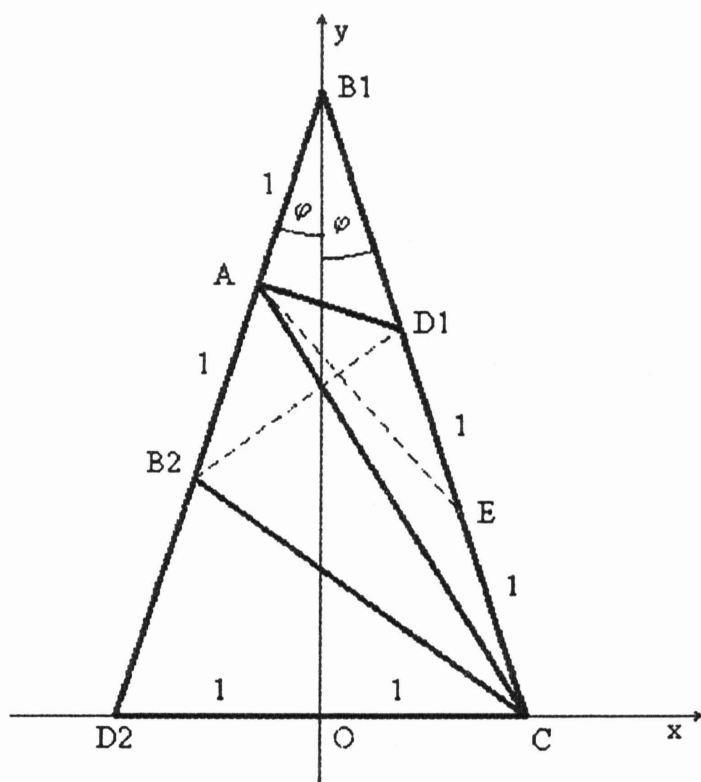
proti odvěsně  $CQ$  v pravoúhlém trojúhelníku  $CAQ$ .

Důkaz, že  $|\sphericalangle CAD_1| < 90^\circ$ , provedeme metodou souřadnic. Zvolme souřadnou soustavu  $(O, x, y)$  podle obr. 9. Body  $O, E$  jsou středy stran  $D_2C, CD_1$ . Když položíme  $|D_2C| = 2$ , stačí dokázat, že pro všechna přípustná  $\varphi$  je splněn vztah  $|AE| > 1$ . Postupně dostáváme:

$$E = [1 - \sin \varphi, \cos \varphi], \quad A = [-\sin \varphi, \cot \varphi - \cos \varphi].$$

Odtud

$$|AE| = \sqrt{1 + (\cot \varphi - 2 \cos \varphi)^2} > 1.$$



Obr. 9

Zabývejme se nyní případem, kdy je úhel  $B_1AD_1$  pravý (obr. 9). Pak je trojúhelník  $B_1B_2D_1$  rovnoramenný a platí

$$|B_1D_1| = |D_1B_2| = |B_2D_2|.$$

Úhel  $B_2D_1C$  je vnějším úhlem trojúhelníku  $B_1B_2D_1$ , tedy má velikost  $4\varphi$ . Trojúhelníky  $CB_2D_1$  a  $CB_2D_2$  jsou shodné. Úhel při základně rovnoramenného trojúhelníku  $D_2CB_1$  má tedy velikost  $4\varphi$  a součet velikostí vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku je  $10\varphi = 180^\circ$ . Je tedy  $\varphi_2 = 18^\circ$ . Trojúhelník  $D_2CB_1$  je opět částí pravidelného pětiúhelníku, podobně jak tomu bylo u rovnoramenného trojúhelníku  $D_1B_1D_2$  s hlavním vrcholem  $D_2$ .

**Závěr:** Síť čtyřstěnu  $ABCD$ , která má tvar rovnoramenného trojúhelníku  $D_2CB_1$  znázorněného na obr. 8 existuje právě tehdy, když pro podíl délky ramene a základny platí:

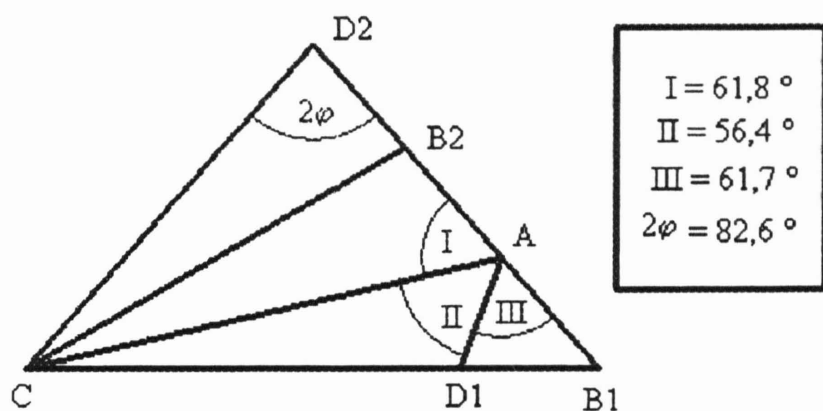
$$1 < \frac{|B_1D_2|}{|D_2C|} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

#### 4. Rovnoramenný trojúhelník $CB_1D_2$ s hlavním vrcholem $D_2$ .

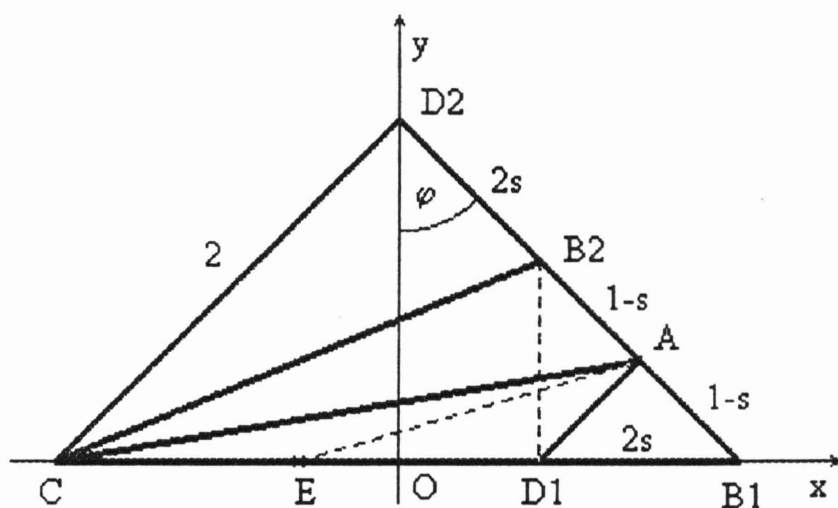
Příslušný interaktivní obrázek vytvořený v Cabri geometrii je představen na obr. 10. Při pevně zvolené základně  $CB_1$  pohybuje vrcholem  $D_2$  po skryté ose úsečky  $CB_1$  a pozorujeme, jak se mění velikosti úhlů při vrcholu  $A$ . Smysl mají pouze situace, kdy  $\varphi > \varphi_1 = 30^\circ$ . Pokud  $\varphi$  roste od limitní hodnoty  $30^\circ$ , velikosti ostrých úhlů  $D_2AC$  a  $CAD_1$  klesají od limitní hodnoty  $90^\circ$  a velikost úhlu  $D_1AB_1$  roste od nuly. Devadesáti stupňů nabývá pro  $\varphi = \varphi_2 \doteq 45^\circ$ . Obrázec představuje síť čtyřstěnu pro  $30^\circ = \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \doteq 45^\circ$ .

Dokážeme nejprve, že je úhel  $D_2AC$  ostrý. Analogicky jako dříve je pata  $Q$  výšky z vrcholu  $C$  trojúhelníku  $CB_1D_2$  uvnitř úsečky  $D_2A$  a úhel  $\sphericalangle D_2AC$  leží proti odvěsně  $CQ$  v pravoúhlém trojúhelníku  $CAQ$ . Je tedy ostrý.

Pro další úvahy zvolíme kartézskou soustavu souřadnic  $(O, x, y)$  podle obr. 11. Označme  $E$  střed strany  $CD_1$  a položme  $|CD_1| = |CD_2| = |D_2B_1| = 2$ ,  $|D_1B_1| = |D_2B_2| = 2s$ . Úhel  $CAD_1$  je ostrý právě tehdy, když platí  $|AE| > 1$ . Stačí tedy dokázat tuto nerovnost.



Obr. 10



Obr. 11

Pomocí obr. 11 postupně vyjádříme:

$$C = [-2 \sin \varphi, 0] \quad D_1 = [2 - 2 \sin \varphi, 0]$$

$$E = \frac{C + D_1}{2} = [1 - 2 \sin \varphi, 0].$$

Z trojúhelníku  $OB_1D_2$  vidíme, že  $\sin \varphi = (1 + s)/2$ . Odtud  $s = 2 \sin \varphi - 1$ . Pomocí předchozích výsledků dostáváme:

$$|AB_1| = 1 - s$$

$$A = [(1 + s) \sin \varphi, (1 - s) \cos \varphi] = [2 \sin^2 \varphi, (1 - \sin \varphi)2 \cos \varphi],$$

$$|AE|^2 = (2 \sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi - 1)^2 + 4 \cos^2 \varphi (1 - \sin \varphi)^2.$$

Odtud

$$|AE|^2 = 5 + 16 \sin^3 \varphi - 12 \sin \varphi$$

Víme, že  $\sin \varphi > 1/2$ . Položíme tedy  $\sin \varphi = x + 1/2$ , a dokážeme, že za předpokladu  $x > 0$  platí  $|AE|^2 - 1 > 0$ . Dostáváme

$$|AE|^2 - 1 = 5 + 16 \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 - 12 \left(x + \frac{1}{2}\right) - 1 = 8x^2(3 + 2x) > 0.$$

Zkoumejme nakonec situaci, kdy je úhel  $B_1AD_1$  pravý (obr. 11). Z podobnosti trojúhelníků  $B_1D_2O$  a  $B_1D_1A$  dostaneme

$$\frac{|AB_1|}{|OB_1|} = \frac{|D_1B_1|}{|B_1D_2|}.$$

Odtud

$$\frac{1 - s}{1 + s} = \frac{2s}{2}.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$s^2 + 2s - 1 = 0$$

s jediným kladným kořenem  $s = \sqrt{2} - 1$ . Tomu odpovídá  $\varphi = \varphi_2 = 45^\circ$ . Trojúhelník  $CB_1D_2$  je rovnoramenný a pravoúhlý.

Ke stejnému výsledku můžeme dospět i jednodušeji, když si uvědomíme, že ze shodnosti trojúhelníků  $AB_1D_1$  a  $AB_2D_1$  plyne

$|D_1B_2| = |D_1B_1|$ . To znamená, že i trojúhelníky  $CD_2B_2$  a  $CB_2D_1$  jsou shodné, a úhel  $CD_1B_2$  je pravý. Odtud

$$|\sphericalangle B_1CD_2| = |\sphericalangle CB_1D_2| = |\sphericalangle D_1B_1A| = 45^\circ.$$

**Závěr:** Síť čtyřstěnu  $ABCD$ , která má tvar rovnoramenného trojúhelníku  $CB_1D_2$  znázorněného na obr. 10 existuje právě tehdy, když pro podíl délky základny a ramene platí:

$$1 < \frac{|B_1C|}{|D_2C|} < \sqrt{2}.$$

V současnosti se prosazuje využívání počítačů při výuce. V planimetrii a stereometrii na středních i základních školách to znamená využití dynamické geometrie k rozvoji představivosti a geometrického myšlení žáků. Neměli bychom přitom zanedbávat hodnotné stránky tradiční výuky matematiky. Snažil jsem se zde ukázat, jak lze skloubit dohromady obojí.

V běžných hodinách matematiky je učitel rád, když stihne probrat základní učivo. Dají se však nalézt možnosti práce s nadanými zájemci. Cílem obou článků bylo poskytnout náměty pro takovou činnost. Není mi známa literatura, která by se uvedenou problematikou zabývala, a tak mohu jen hlubším zájemcům doporučit, aby se pokusili analogicky prozkoumat čtyřstěny se sítí tvaru pravúhlého trojúhelníku, resp. rovnoramenného lichoběžníku.

*Mgr. Pavel Leischner*  
*Katedra matematiky PdF*  
*Jihočeská univerzita*  
*Jeronýmova 10*  
*371 15 České Budějovice*  
*e-mail: leischner@pf.jcu.cz*