

Pavel Leischner

Pravoúhelníkové síť čtyřstěnu (1)

Učitel matematiky, Vol. 11 (2003), No. 3, 181–189

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150855>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2003

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PRAVOÚHELNÍKOVÉ SÍTĚ ČTYŘSTĚNU (1)

PAVEL LEISCHNER¹¹

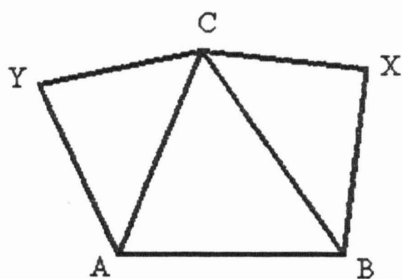
Učivo o sítích těles poskytuje dobré zázemí k rozvíjení geometrického myšlení i tvořivé práci žáků, u nichž nejprve na základní škole vytváříme představy sítí jednoduchých mnohostěnů, učíme je kreslit takové sítě a uplatňovat své poznatky při výrobě papírových modelů těles. Látku obvykle dále nerozvíjíme, snad s výjimkou hledání nejkratších cest na povrchu mnohostěnu. Vhodným námětem pro další práci je vyšetřování mnohostěnů se sítěmi speciálních tvarů.

Zde se pokusíme zjistit, jaké čtyřstěny mohou mít síť tvaru pravoúhelníku. Článek je napsán tak, aby si jej mohl učitel metodicky upravit pro zájmovou práci se žáky na střední, případně i základní škole. Výuka by měla vycházet z experimentů prováděných žáky. Ti by pak na základě svého pozorování a za minimální pomoci učitele „objevovali“ jednotlivé poznatky.

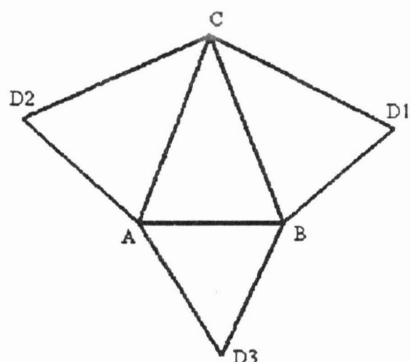
Představme si nejprve, že jsme papírový model nějakého čtyřstěnu rozřezali žiletkou podél všech jeho hran na čtyři trojúhelníky. Zamícháme s nimi, abychom nevěděli, jak byly původně navzájem umístěny. Potom je na pracovním stole zkoušíme přikládat k sobě a ptáme se, které seskupení představuje síť čtyřstěnu. Nejprve musíme vybrat dva trojúhelníky shodující se v některé straně, a umístit je touto stranou k sobě. Třetí trojúhelník vybereme a přidáme tak, aby měl společnou stranu se vzniklým čtyřúhelníkem. Všimněme si, že i když existují různé možnosti provedení celé operace, budou mít všechny tři trojúhelníky vždy společný právě jeden vrchol. Pokaždé vznikne konfigurace trojúhelníků téhož typu, znázorněná na obr. 1. Budeme ji nazývat *základ sítě čtyřstěnu*.

Ve shodě s obrázkem 1 označme prostřední trojúhelník ABC a původní čtyřstěn $ABCD$. Ke stranám CX a CY základu $ABXC$

¹¹Tato práce byla podporována grantem MSM 124 100006

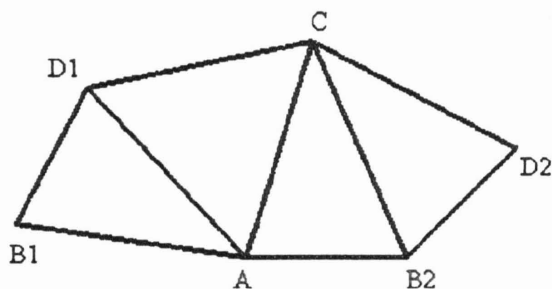


Obr. 1



Obr. 2

nemůžeme připojit poslední trojúhelník, protože vrchol C , stejně jako každý jiný vrchol čtyřstěnu, je průnikem pouze tří stěn. Pokud jsme měli štěstí, bude platit $|CX| = |CY|$ a po slepení trojúhelníků (v místě jejich kryjících se stran lepící páskou) docílíme otáčením trojúhelníků ACY , BCX okolo přímk AC , BC splynutí stran CX a CY v prostoru, což vytvoří hranu CD .



Obr. 3

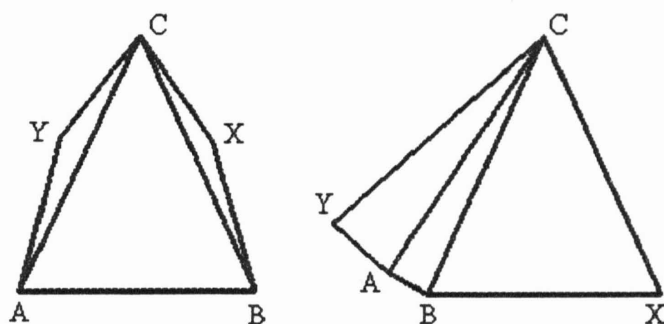
Z předchozího plyne, že čtyřstěn je jednoznačně určen třemi stěnami. V případě, že naše skládání bylo úspěšné, má poslední trojúhelník strany shodné se stranami AB , BX a AY základu sítě. Když jej připojíme ke straně AB , vznikne síť typu I znázorněná na obrázku 2. Připojením k některé ze stran BX , AY dostaneme síť typu II (obr. 3). Jiné typy sítí čtyřstěnu neexistují.

Vidíme, že síť čtyřstěnu je obecně šestiúhelník se třemi vyznačenými úhlopříčkami, které buď ohraničují trojúhelník (typ I),

nebo tvoří neuzavřenou lomenou čáru (typ II). Strany šestiúhelníku budeme nazývat *stranami sítě* a to i v takových situacích, kdy sousední dvě svírají 180° . Vyznačené úhlopříčky nazveme *hrany sítě*.

Vyplatí se rozlišovat tři druhy vrcholů sítě. Vrchol sítě je *vrcholem prvního druhu*, nebo též *jednoduchým vrcholem*, pokud není koncovým bodem hrany sítě. Vrchol sítě, z kterého vychází jedna nebo více hran, nazýváme (*složený*) *vrchol druhého nebo třetího druhu*. Jinak řečeno, vrchol sítě je tolikátého druhu, kolik budoucích stěn čtyřstěnu se v něm stýká.

Je zřejmé, že síť může mít nekonvexní nebo přímé úhly jen při složených vrcholech. Čtyři trojúhelníky, jejichž sjednocení tvoří síť čtyřstěnu, můžeme nazývat *stěny*. Výše uvedenou terminologii budeme užívat i pro základ sítě čtyřstěnu.

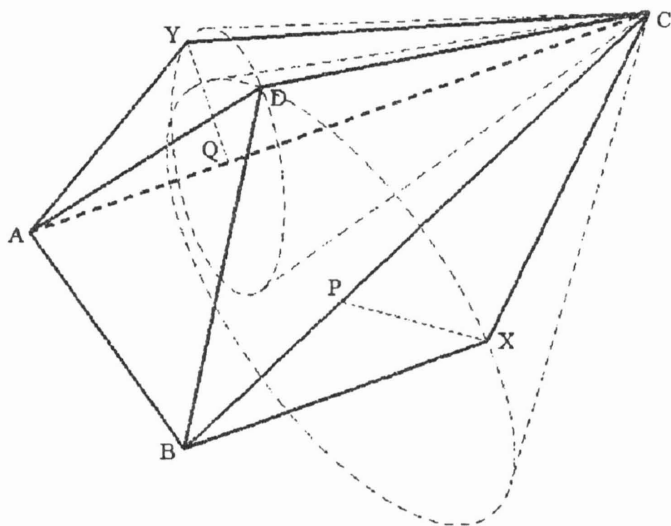


Obr. 4

Ptejme se nyní, kdy je obrazec znázorněný na obr. 1 základem sítě čtyřstěnu. Víme již, že CX a CY musí mít stejnou délku. Není to však podmínka postačující, protože nezaručuje setkání vrcholů Y a X v prostoru při otáčení trojúhelníků ACY a BCX kolem jejich stran AC a BC . Na obr. 4 vidíme příklady dvou základů sítě čtyřstěnu, který neexistuje, třebaže podmínka shodnosti odpovídajících si stran je splněna. Objevu další nutné podmínky, která spolu s podmínkou shodnosti stran CX a CY tvoří podmínku postačující, by mělo předcházet experimentování s větším množ-

stvím papírových modelů základů sítě různých tvarů. Modely si mohou žáci vyrobit narýsováním na list papíru a vystřihnutím. Názornější a trvalejší pomůcku získáme vyříznutím pomocí odlamovacího nože ze stěny papírové krabice z vlnité lepenky. Po vyříznutí základu sítě nařízneme všechny tři hrany až ke spodní vrstvě papíru. Stěny takového modelu jsou relativně pevné, zachovávají svůj tvar (na rozdíl od stěn z měkkého papíru se neohýbají) a snadno se otáčí kolem naříznutých hran.

Označme po řadě P a Q paty kolmic z vrcholů X a Y na přímky CB a CA . Při otáčení opisují pravoúhlé trojúhelníky CPX a CQY kužele se shodnými stranami a společným vrcholem C . Z obrázku 5 vidíme, že čtyřstěn vzniká právě tehdy, když se pláště těchto kuželů protnou. (Lze též říct, že se protnou kružnice ohraničující podstavy kuželů.) Stejně názorně, jako když odvozujeme trojúhelníkovou nerovnost z představy sestrojování trojúhelníku pravítkem a kružítkem při daných délkách jeho stran ukážeme, že předchozí tvrzení je ekvivalentní s větou: Čtyřstěn $ABCD$ vznikne otáčením vyznačeným na obr. 5 právě tehdy, když $|CX| = |CY|$ a každá z velikostí úhlů ACY , ACB a BCX je menší, než součet zbývajících dvou.



Obr. 5

To znamená, že velikosti úhlů při vrcholu třetího druhu splňují ostrou trojúhelníkovou nerovnost, podobně jako délky stran trojúhelníku. Jinými slovy můžeme říci, že každá z těchto velikostí je menší než polovina jejich součtu. Tato druhá formulace je vhodnější pro praktické výpočty.

Vnímavého čtenáře možná napadlo, že trojúhelníková nerovnost pro délky $|AY|$, $|AB|$ a $|BX|$, která plyne například z představy rotace trojúhelníků AQY a BPX , je také ekvivalentní s posledním tvrzením. Není tomu tak. V levé části obrázku 4 vidíme základ sítě neexistujícího čtyřstěnu, třebaže trojúhelník se stranami délek $|AY|$, $|AB|$ a $|BX|$ existuje.

Dosavadní úvahy shrneme v následujícím kritériu:

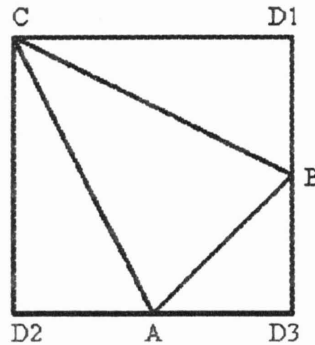
Čtyřstěn, jehož síť je znázorněna na obr. 1 nebo na obr. 2, existuje právě tehdy, když současně platí:

- (a) (*Podmínka hran*) Strany sítě, jejichž krajní body jsou (až na případný index) označeny stejnými písmeny, mají stejnou délku.
- (b) (*Podmínka úhlů*) Každá z velikostí tří úhlů, které se stýkají při některém vrcholu třetího druhu, je menší než polovina součtu těchto tří velikostí.

Poznamenejme, že při ověřování podmínky úhlů opravdu můžeme pracovat jen s jedním, libovolně vybraným vrcholem třetího druhu. S ním totiž vybereme základ sítě. Čtvrtá stěna je jednoznačně určena podmínkou hran a tvoří jen „víko“ ke „krabici“, jejíž sítí je zvolený základ.

Hledejme nyní čtyřstěny s pravoúhelníkovou sítí. Taková síť typu I má zřejmě pravé úhly při všech jednoduchých a jednom složeném vrcholu. Zbývající dva úhly jsou přímé. Všechny její složené vrcholy jsou třetího druhu. Proto nezáleží na tom, který z nich zvolíme jako pravý. Bez újmy na obecnosti tedy můžeme vyšetřovat jen síť znázorněnou na obr. 6. Z podmínky hran snadno zjistíme, že vrcholy A a B jsou po řadě středy stran D_2D_3 a D_3D_1 . Navíc má síť vždy tvar čtverce, neboť $|CD_2| = |CD_1|$.

Podmínku úhlů ověříme snadno například pro vrchol A . Platí $|\sphericalangle CAD_2| + |\sphericalangle BAD_3| + |\sphericalangle BAC| = 180^\circ$. Každý z úhlů CAD_2 ,



Obr. 6

BAD_3 a BAC by tedy měl být ostrý. Že tomu tak je, vidíme přímo z obrázku: První dva úhly jsou protilehlé odvěsnám CD_2 a BD_3 pravoúhlých trojúhelníků ACD_2 a ABD_3 , třetí je při základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABC .

Poznali jsme že čtyřstěn s pravoúhelníkovou sítí typu I existuje. Příslušná síť je vždy čtvercová (obr. 6).

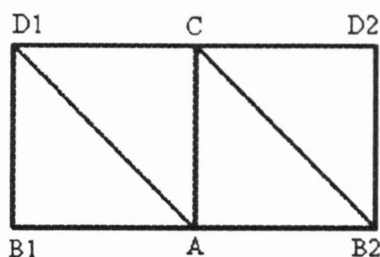
Uvažujme dále pravoúhelníkovou síť typu II s označením podle obr. 3. Právě pravé úhly jsou nutně při jednoduchých vrcholech B_1 , D_2 a při některých dvou složených vrcholech. Podle toho, jakého typu jsou tyto složené vrcholy, rozlišíme čtyři možnosti:

1. Typ II-II. Právě úhly jsou při vrcholech druhého druhu (obr. 7). Podmínka hran je zde splněna právě tehdy, když jsou vrcholy, A a C , ve středech stran B_1B_2 a D_1D_2 . Podmínka úhlů splněna není, neboť například úhel B_2AC je pravý a je tedy roven součtu úhlů B_1AD_1 a D_1AC .

Čtyřstěn se sítí typu II-II neexistuje.

2. Typ III-III. Úhly při vrcholech třetího druhu jsou pravé. Při označení podle obr. 8 a s ohledem na podmínku hran položíme

$$\begin{aligned}
 a &= |AD_2| = |B_1C| \\
 b &= |AB_1| = |AB_2| = |D_1C| = |D_2C|.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

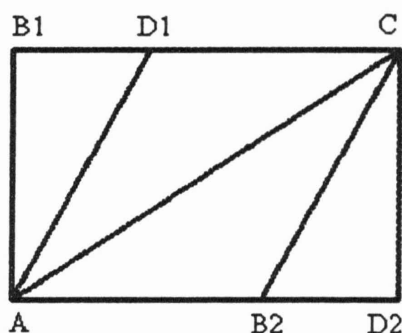


Obr. 7

Zřejmě je též

$$|B_1D_1| = |B_2D_2| = a - b.$$

Podmínka úhlů při vrcholu A je splněna, právě když každá z velikostí $|\sphericalangle B_1AD_1|$, $|\sphericalangle D_1AC|$ a $|\sphericalangle CAB_2|$ je menší než 45° .



Obr. 8

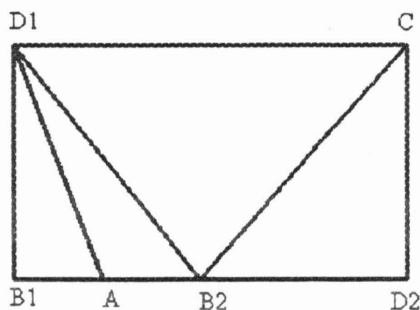
Pro úhel B_1AD_1 to platí jen když $|B_1D_1| < |B_1A|$. V pravoúhlém trojúhelníku B_1AD_1 je totiž úhel o velikosti menší než 45° jen proti kratší odvěsně. Je tedy $0 < a - b < b$. Pravoúhelník tvořící síť tedy nemůže mít libovolný tvar. Délky a , b jeho stran jsou vázány podmínkou

$$b < a < 2b. \tag{2}$$

Platí-li (2) jsou i zbývající úhly při vrcholu A menší než 45° . Úhel B_2AC leží v pravoúhlém trojúhelníku CAD_2 opět proti kratší od-

věsně. Úhel CAD_1 se v trojúhelníku ACD_1 nachází proti straně D_1C , kratší než AD_1 , jak plyne z pravoúhlého trojúhelníku AD_1B . Proti straně AD_1 je pak úhel ACD_1 , který leží v pravoúhlém trojúhelníku ACB_1 proti kratší odvěsně. Je tedy $|\sphericalangle CAD_1| < |\sphericalangle ACD_1| < 45^\circ$.

Platnost vztahů (1) a (2) zaručuje existenci čtyřstěnu se sítí znázorněnou obrázkem 8.



Obr. 9

3. Typ II-III-S. Úhly při sousedních složených vrcholech sítě jsou pravé. Příslušné vrcholy necht' jsou (při označení podle obr. 3) D_1 a C . Pomocí obr. 9 dostáváme

$$|B_1D_2| = |D_1C| = |CD_2| = |B_1D_1| = |B_2D_2|,$$

což není možné.

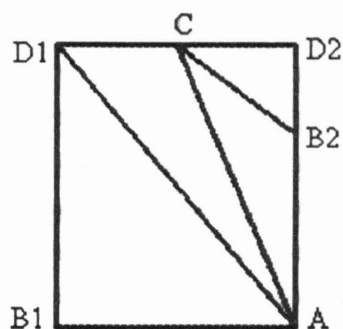
Čtyřstěn s takovou sítí neexistuje.

4. Typ II-III-N. Úhly při nesousedních složených vrcholech nestejného typu jsou pravé. Ve shodě s dosavadním způsobem značení vrcholů můžeme uvažovat situaci na obr. 10. Kdyby příslušný čtyřstěn existoval, dostali bychom například

$$|D_2B_2| = |D_1B_1| = |D_2A|.$$

Čtyřstěn v tomto případě opět neexistuje.

Závěr: Čtyřstěny mohou mít buď jen čtvercové sítě typu I, představené na obr. 6, nebo obdélníkové sítě typu II znázorněné



Obr. 10

obrázkem 8. Délky stran obdélníku přitom splňují vztahy (1) a (2).

Čtenáři lze doporučit samostatně prozkoumat sítě jiných speciálních tvarů. Zajímavá je například problematika čtyřstěnu se sítěmi tvaru rovnoramenného trojúhelníku, kterou se budeme zabývat příště. Ukážeme, jak se dá využít dynamická geometrie k nalezení všech takových sítí.

Pokračování příště

*Mgr. Pavel Leischner
Katedra matematiky PdF
Jihočeská univerzita
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: leischner@pf.jcu.cz*