Zbyněk Nádeník

Konstrukce elipsoidu jako prostorová analogie k zahradnickému sestrojení elipsy

*Učitel matematiky*, Vol. 11 (2003), No. 3, 165–175

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150853`

# KONSTRUKCE ELIPSOIDU JAKO PROSTOROVÁ ANALOGIE K ZAHRADNICKÉMU SESTROJENÍ ELIPSY

ZBYNĚK NÁDENÍK

Rovnice elipsy s poloosami $a$, $b$ v základní poloze vůči soustavě pravoúhlých souřadnic $x$, $y$ je dobře známa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b > 0. \tag{1}$$

Též je dobře známa zahradnická konstrukce, jíž se elipsa sestrojí při daných ohniskách a dané délce hlavní osy.

Mysleme si v prostoru soustavu pravoúhlých souřadnic $x$, $y$, $z$. Množině bodů, jejichž souřadnice vyhovují rovnici s konstantami $a$, $b$, $c$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a, b > c > 0 \tag{2}$$

se říká **elipsoid**, *trojosý* při $a \neq b$, *rotační zploštělý* při $a = b$ (s osou rotace $z$). V tomto druhém případě každá rovina $z = z_0 =$ konst. $\in (-c, c)$ protíná elipsoid (2) v kružnici $x^2 + y^2 = a^2 \left(1 - \frac{z_0^2}{c^2}\right)$, $z = z_0$. Připustíme-li $a = b = c$, přejde elipsoid (2) v kulovou plochu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ jako množinu bodů, jejichž vzdálenost od počátku je $a$.

A nyní otázka: Existuje geometrická konstrukce, která by umožňovala v prostoru sestrojovat body elipsoidu, třeba i trojosého? Jinými slovy: existuje prostorová analogie k zahradnické konstrukci elipsy v rovině?

Princip této rovinné konstrukce byl znám už starořeckým matematikům. Prostorové protějšky však byly objeveny až v 19. století. Přišli na ně němečtí matematici Carl Jacobi (1804-1851) ve 30. letech (důkaz publikován až posmrtně 1871) a Otto Stande (1857-1928) v 80. letech. Standeho způsob sice užívá vlákna jako zahradnická konstrukce (rovněž jako u ní upevněného ve dvou bodech, avšak zalomeného nikoliv jen jednou, nýbrž třikrát), ale je komplikovaný a jeho odůvodnění je obtížné. Jacobiho způsob má jednodušší důkaz, zahradnická konstrukce však vyžaduje jistou modifikaci, aby více vynikla prostorová analogie.

V dalších řádcích ukáži na velmi speciálním případu Jacobiho prostorovou konstrukci. Nebudeme z analytické geometrie potřebovat – kromě zmíněných základních poznatků o elipse – už nic víc, než vzorec pro vzdálenost dvou bodů v rovině a v prostoru, když jsou známy jejich souřadnice.

Nejdříve přikročíme k modifikaci zahradnické konstrukce elipsy ve smyslu Jacobiho.

Zvolíme rovinu, v níž body a přímky budu značit latinskými písmeny a nazvu ji latinskou. Dále zvolíme přímku, na níž body budu značit řeckými písmeny a nazvu ji řeckou. Latinskou rovinu opatřme systémem pravoúhlých souřadnic $x$, $y$ s počátkem $0$; její bod označíme $P[x, y]$; konečně na ose $x$ vyberme dva body (viz obr. 1a)

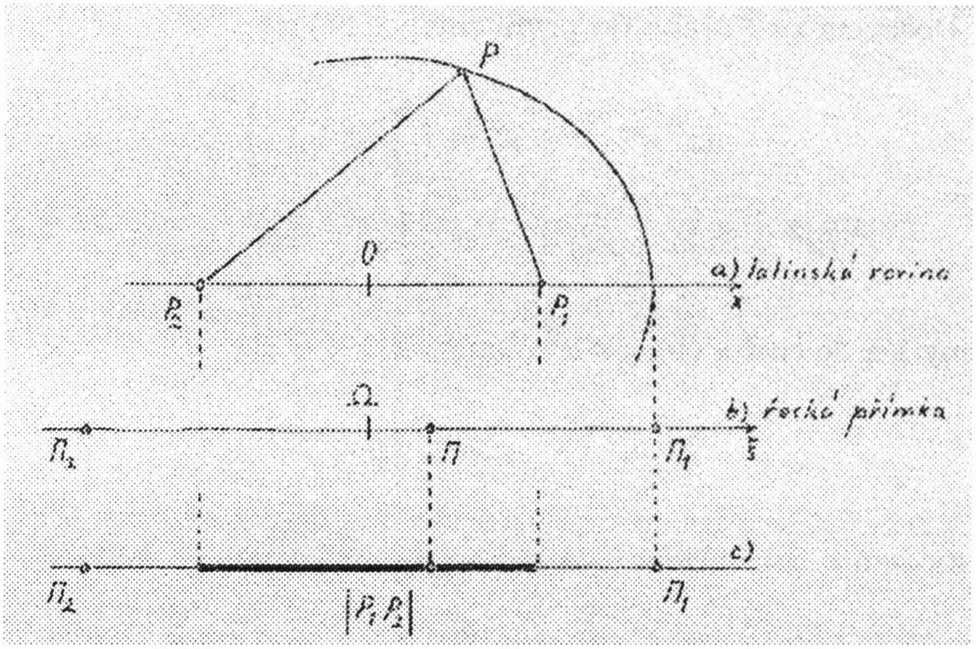
$$P_1[x_1 > 0, 0], \quad P_2[-x_1, 0]. \tag{3}$$

Řeckou přímku opatřme systémem souřadnic $\xi$ s počátkem $\Omega$; její bod označíme $\Pi[\xi]$; konečně vyberme na ní dva body (viz obr. 1b)

$$\Pi_1[\xi_1 > 0], \quad \Pi_2[-\xi_1]; \tag{4}$$

stále nechť

$$x_1 < \xi_1, \quad \text{tj.} \quad |P_1P_2| < |\Pi_1\Pi_2|. \tag{5}$$




Obr. 1

K bodu $\Pi[\xi]$ řecké přímky nalezneme v latinské rovině – pokud to ovšem vůbec jde – bod $P[x,y]$ tak, aby

$$|P_1P| = |\Pi_1\Pi|, \qquad |P_2P| = |\Pi_2\Pi|. \tag{6}$$

Vyšetříme množinu bodů $P$.

To je ohlášené pozměnění zahradnické konstrukce elipsy.

V souřadnicích latinské roviny a řecké přímky vyjádříme podmínky (6) při (3) a (4) takto:

$$\begin{aligned}(x-x_1)^2+y^2&=(\xi-\xi_1)^2\,,\\(x+x_1)^2+y^2&=(\xi+\xi_1)^2\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Vyloučíme $\xi$. Odečteme-li od druhé rovnice první, dostaneme $4x_1x = 4\xi_1\xi$, a tedy

$$\xi = \frac{x_1}{\xi_1}x \qquad \text{nebo} \qquad x = \frac{\xi_1}{x_1}\xi. \tag{8}$$

Dosazení za $\xi$ třeba do první rovnice (7) dá

$$(x - x_1)^2 + y^2 = \left(\frac{x_1}{\xi_1}x - \xi_1\right)^2,$$

$$(x^2 - 2x_1x + x_1^2) + y^2 = \frac{x_1^2}{\xi_1^2}x^2 - 2x_1x + \xi_1^2.$$

Členy s $x$ se ruší a členy s $x^2$ sloučíme:

$$\frac{\xi_1^2 - x_1^2}{\xi_1^2}x^2 + y^2 = \xi_1^2 - x_1^2.$$

Vzhledem k (5) můžeme rozdílem $\xi_1^2 - x_1^2$ krátit

$$\frac{x^2}{\xi_1^2} + \frac{y^2}{\xi_1^2 - x_1^2} = 1 \tag{9}$$

a dospíváme k rovnici tvaru (1).Vyjadřuje elipsu s poloosami $\xi_1$, $\sqrt{\xi_1^2 - x_1^2}$ a s čtvercem excentricity

$$\xi_1^2 - \left(\sqrt{\xi_1^2 - x_1^2}\right)^2 = x_1^2,$$

tj. s ohnisky $P_1$, $P_2$ z (3).

Vraťme se k rovnicím (7), z kterých jsme vyloučili $\xi$, a vylučme z nich nyní $x$. Dosazení za $x$ z (8) do první rovnice (7) poskytuje

$$\left(\frac{\xi_1}{x_1}\xi - x_1\right)^2 + y^2 = (\xi - \xi_1)^2,$$

$$\frac{\xi_1^2}{x_1^2}\xi^2 - 2\xi_1\xi + x_1^2 + y^2 = \xi^2 - 2\xi_1\xi + \xi_1^2.$$

Tedy

$$y^2 = \left(1 - \frac{\xi_1^2}{x_1^2}\right)\xi^2 + \xi_1^2 - x_1^2.$$

Protože $y^2 \geq 0$, tak

$$-\frac{\xi_1^2 - x_1^2}{x_1^2}\xi^2 + \xi_1^2 - x_1^2 \geq 0.$$

Při (5) můžeme krátit kladným číslem $\xi_1^2 - x_1^2$ a dostaneme

$$-\frac{1}{x_1^2}\xi^2 + 1 \geq 0 \qquad \text{čili} \qquad \xi^2 \leq x_1^2.$$

Poslední nerovností je na řecké přímce dáno omezení pro bod $\Pi[\xi]$, vedoucí k bodu $P[x, y]$ elipsy v latinské rovině (viz obr. 1c).

Tolik k Jacobiho modifikaci zahradnické konstrukce elipsy jako přípravě pro Jacobiho sestrojení elipsoidu.

Nyní přejdeme o dimenzi výš. Prostor, v němž body a přímky budeme značit latinskými písmeny, nazveme latinským. Zvolenou rovinu, v níž body a přímky budeme značit řeckými písmeny, nazveme řeckou. Latinský prostor opatříme soustavou pravoúhlých souřadnic $x$, $y$,$z$ s počátkem 0; bod prostoru označíme $P[x, y, z]$; konečně v rovině $(x, y)$ vybereme tři body – vrcholy pravoúhlého trojúhelníka (viz obr. 2a)

$$P_1[x_1 > 0, y_1 > 0, 0], P_2[-x_1, y_1, 0], P_3[x_1, -y_1, 0]. \tag{10}$$

Řeckou rovinu opatřme systémem pravoúhlých souřadnic $\xi, \eta$ s počátkem $\Omega$; její bod označíme $\Pi[\xi, \eta]$; konečně vybereme v ní tři body – vrcholy pravoúhlého trojúhelníka (viz obr. 2b)

$$\Pi_1[\xi_1 > 0, \eta_1 > 0], \qquad \Pi_2[-\xi_1, \eta_1], \qquad \Pi_3[\xi_1, -\eta_1]. \tag{11}$$

Stále nechť

$$x_1 < \xi_1, \qquad y_1 < \eta_1. \tag{12}$$

K bodu $\Pi[\xi, \eta]$ řecké roviny nalezneme v latinském prostoru – pokud to ovšem vůbec jde – bod $P[x, y, z]$ tak, aby (viz obr. 2)

$$|P_1P| = |\Pi_1\Pi|, \qquad |\Pi_2P| = |\Pi_2\Pi|, \qquad |\Pi_3P| = |\Pi_3\Pi|. \tag{13}$$

Vyšetříme množinu bodů $P$.

V souřadnicích latinského prostoru a řecké roviny vyjádříme podmínky (13) při (10) a (11) takto:

$$\begin{aligned}
(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2&=(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2,\\
(x+x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2&=(\xi+\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2,\\
(x-x_1)^2+(y+y_1)^2+z^2&=(\xi-\xi_1)^2+(\eta+\eta_1)^2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Vyloučíme $\xi$ a $\eta$. Odečteme-li jak od druhé, tak od třetí rovnice první, dostaneme $4x_1x = 4\xi_1\xi$, $4y_1y = 4\eta_1\eta$ a tedy

$$\xi = \frac{x_1}{\xi_1}x,\ \eta = \frac{x_1}{\eta_1}y \qquad \text{nebo} \qquad x = \frac{\xi_1}{x_1}\xi,\ y = \frac{\eta_1}{y_1}\eta. \tag{15}$$

Dosazení za $\xi$ a $\eta$ do první rovnice (14) dá

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2=\left(\frac{x_1}{\xi_1}x-\xi_1\right)^2+\left(\frac{y_1}{\eta_1}y-\eta_1\right)^2$$

čili

$$\begin{aligned}
&(x^2-2x_1x+x_1^2)+(y^2-2y_1y+y_1^2)+z^2=\\
&=\left(\frac{x_1^2}{\xi_1^2}x^2-2x_1x+\xi_1^2\right)+\left(\frac{y_1^2}{\eta_1^2}y^2-2y_1y+\eta_1^2\right).
\end{aligned}$$

Členy s $x$ a $y$ se zruší a členy s $x^2$, resp. $y^2$ sloučíme:

$$\frac{\xi_1^2-x_1^2}{\xi_1^2}x^2+\frac{\eta_1^2-y_1^2}{\eta_1^2}y^2+z^2=K, \tag{16}$$

$$K=\xi_1^2-x_1^2+\eta_1^2-y_1^2>0 \tag{17}$$

v důsledku (12). Zlomek při $x^2$, resp. $y^2$ můžeme při (12) krátit $\xi_1^2-x_1^2\neq 0$, resp. $\eta_1^2-y_1^2\neq 0$ a celou rovnici (15) lze vzhledem k (17) dělit její pravou stranou $K$. Rovnici (16) tak přepíšeme na

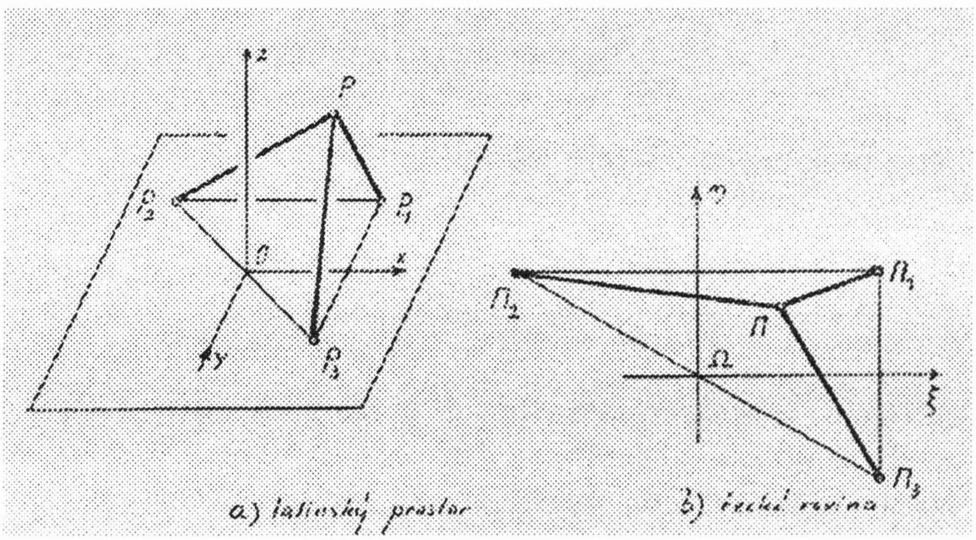
$$\frac{x^2}{\dfrac{\xi_1^2}{\xi_1^2-x_1^2}\cdot K}+\frac{y^2}{\dfrac{\eta_1^2}{\eta_1^2-y_1^2}\cdot K}+\frac{z^2}{K}=1. \tag{18}$$

To je však rovnice tvaru (2).

Protože při (12) je

$$\frac{\xi_1^2}{\xi_1^2 - x_1^2} > 1, \qquad \frac{\eta_1^2}{\eta_1^2 - y_1^2} > 1, \tag{19}$$

jsou v (18) jmenovatel při $x^2$ i jmenovatel při $y^2$ větší než jmenovatel při $z^2$. Jsou tedy splněny i nerovnosti z (2). Rovnice (18) tedy znamená elipsoid, nikdy kulovou plochu. Zlomky (19) a tudíž jmenovatelé při $x^2$ a $y^2$ v (18) jsou si rovny právě jen při $\xi_1^2 y_1^2 = x_1^2 \eta_1^2$, tj. $\xi_1 : \eta_1 = x_1 : y_1$. Tato úměra geometricky znamená podobnost trojúhelníků $P_1P_2P_3$ a $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$.



Obr. 2

Můžeme tedy říci: jestliže v pravoúhlých trojúhelnících $P_1P_2P_3$ v latinském prostoru a $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$ v řecké rovině platí pro jejich odvěsny

$$|P_1P_2| < |\Pi_1\Pi_2|, \qquad |P_1P_3| < |\Pi_1\Pi_3|,$$

vede Jacobiho konstrukce k elipsoidu v latinském prostoru. Jsou-li trojúhelníky podobné – a jen v tomto případě – jedná se o elipsoid rotační (s osou rotace kolmou k rovině trojúhelníka $P_1P_2P_3$), jinak o elipsoid trojosý. Nikdy se tak nezíská kulová plocha.

Vrátíme se k rovnicím (14), z nichž jsme vyloučili $\xi$ a $\eta$, a eliminujeme z nich nyní $x$ s $y$. Dosazení za $x$ i $y$ z (15) do první rovnice (14) poskytne

$$\left(\frac{\xi_1}{x_1}\xi - x_1\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{y_1}\eta - y_1\right)^2 + z^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 .$$

Podobně jako výše tentokrát dostaneme s $K$ z (17)

$$z^2 = \frac{x_1^2 - \xi_1^2}{x_1^2}\xi^2 + \frac{y_1^2 - \eta_1^2}{y_1^2}\eta^2 + K.$$

Pravá strana musí být nezáporná, tedy

$$\frac{\xi_1^2 - x_1^2}{x_1^2}\xi^2 + \frac{\eta_1^2 - y_1^2}{y_1^2}\eta^2 \leq K$$

a opět z podobných důvodů jako výše

$$\frac{\xi^2}{\dfrac{x_1^2}{\xi_1^2 - x_1^2}\cdot K} + \frac{\eta^2}{\dfrac{y_1^2}{\eta_1^2 - y_1^2}\cdot K} \leq 1. \tag{20}$$

Tato rovnice charakterizuje v řecké rovině body $\Pi[\xi, \eta]$, které leží v uzavřené oblasti ohraničené elipsou, jež je určena znamením rovnosti v (20). V této oblasti se při Jacobiho konstrukci může pohybovat bod $\Pi$.

V rovnici (1) elipsy učiňme tyto formální změny: od jmenovatele prvního zlomku odečtěme jmenovatel druhého zlomku a navíc pak položme $y = 0$. Dostaneme tak

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} = 1, \ y = 0 \qquad \text{čili} \qquad x^2 = a^2 - b^2, \ y = 0,$$

což znamená obě ohniska elipsy (1) na její hlavní ose $x$. Aplikujeme-li to na elipsu (9), kterou jsme dostali rovinnou Jacobiho konstrukcí, vidíme, že má ohniska $[\pm x_1, 0]$, tedy body $P_1$, $P_2$ z (3). To jsme ovšem zjistili už výše.

Analogicky v rovnici elipsoidu (2) učiňme tyto formální změny: od jmenovatelů prvního a druhého zlomku odečtěme jmenovatel třetího zlomku a navíc pak položíme $z = 0$. Dostaneme tak

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \qquad z = 0,$$

což znamená tzv. fokální elipsu elipsoidu (2) v jeho hlavní rovině $(x, y)$. Geometrický význam fokální elipsy pro elipsoid je podobný – i když značně složitější – jako význam ohniska pro elipsu.

Podle tohoto vzoru určíme fokální elipsu elipsoidu (18) získaného prostorovou Jacobiho konstrukcí. Poněvadž

$$\frac{\xi_1^2}{\xi_1^2 - x_1^2} K - K = \frac{x_1^2}{\xi_1^2 - x_1^2} K, \qquad \frac{\eta_1^2}{\eta_1^2 - y_1^2} K - K = \frac{y_1^2}{\eta_1^2 - y_1^2} K,$$

má zmíněná fokální elipsa rovnice

$$\frac{x^2}{\dfrac{x_1^2}{\xi_1^2 - x_1^2} \cdot K} + \frac{y^2}{\dfrac{y_1^2}{\eta_1^2 - y_1^2} \cdot K} = 1, \qquad z = 0. \tag{21}$$

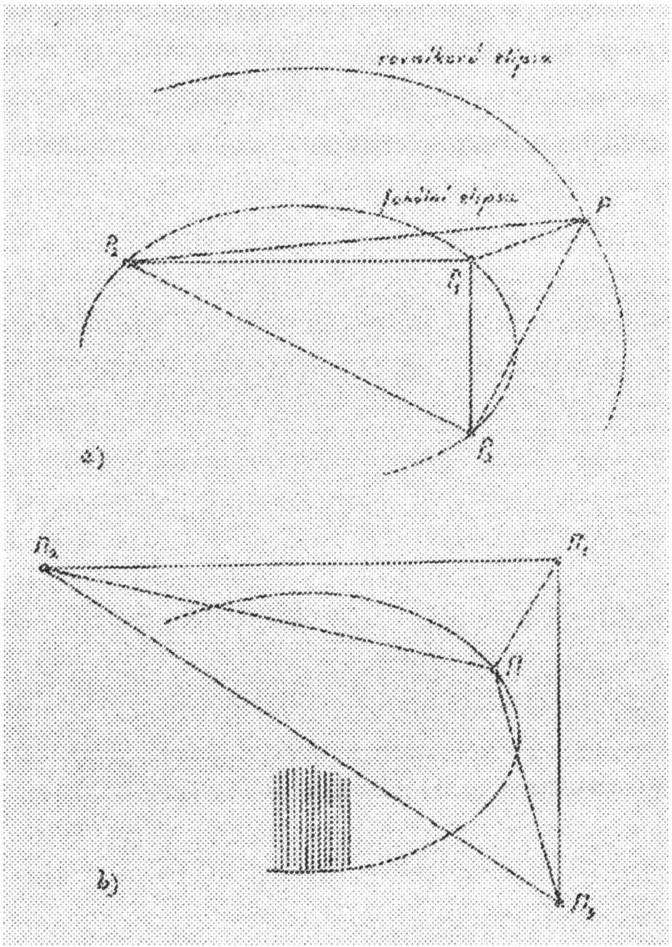
Vidíme, že je shodná s elipsou v řecké rovině vyjádřenou v (20) se znamením $=$. Současně vidíme, že naše fokální elipsa (21) jde výchozími body $P_1$, $P_2$, $P_3$ z (10).

Zůstal jsem jen u případu $\xi_1 > x_1$, $\eta_1 > y_1$ z (12). Kdybychom předpokládali $\xi_1 > x_1$, $\eta_1 < y_1$ nebo $\xi_1 < x_1$, $\eta_1 > y_1$ nebo $\xi_1 < x_1$, $\eta_1 < y_1$, znamenala by rovnice (18) hyperboloidy při $K \neq 0$ a rovnice (16) kuželové plochy při $K = 0$.

Kdybychom připustili $\xi_1 = x_1, \eta_1 \neq y_1$ nebo $\xi_1 \neq x_1, \eta_1 = y_1$, znamenala by rovnice (16) (bezprostředně předcházející rovnici (18)) válcové plochy. Konečně $\xi_1 = x_1, \eta_1 = y_1$ vede k dvojnásob vzaté rovině $(x, y)$; to je ovšem triviální případ shodných trojúhelníků $P_1P_2P_3$ a $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$.

Pro Jacobiho konstrukci elipsy i elipsoidu si snadno představíme jednoduchou aparaturu. Popíši ji nejdříve pro elipsu, abychom lépe viděli analogii pro trojosý elipsoid.

Mysleme si dvojnožku, jejíž nožky jsou teleskopické (lze je prodloužit nebo zkrátit), jsou opatřeny hroty a jsou spojeny v kloubu, který budu idealizovat bodem. Dvojnožku roztáhneme do řecké přímky (viz obr. 1c), její kloub vložíme do bodu dříve vyšetřené úsečky (na obr. 1c silně vytažené) a její nožky přizpůsobíme tak, aby hroty byly v bodech $\Pi_1$ a $\Pi_2$; kloub zaujímá polohu bodu $\Pi$. Pak dvojnožku položíme na latinskou rovinu a zalomíme ji v bodovém kloubu tak, aby hroty nožek byly v bodech $P_1$ a $P_2$ latinské roviny. Kloub jako bod $P$ je pak na elipse s ohnisky $P_1$ a $P_2$ a s délkou hlavní osy $|\Pi_1\Pi_2|$. Toto sestrojení bodu elipsy kopíruje – i když trochu těžkopádně – její zahradnickou konstrukci.



Obr. 3

Nyní v prostoru. Mysleme si trojnožku (stativ) s teleskopickými nožkami opatřenými hroty a spojenými v kloubu, který zase budu idealizovat bodem. Trojnožku roztáhneme do řecké roviny a její nožky přizpůsobíme tak, aby hroty byly v bodech $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$; kloub zaujímá polohu bodu $\Pi$. Pak trojnožku v kloubu zalomíme a přemístíme tak, aby hroty nožek byly v bodech $P_1$, $P_2$, $P_3$ latinského prostoru. Kloub jako bod $P$ je pak na elipsoidu, jehož fokální elipsa (v rovině $P_1P_2P_3$, která je ovšem jeho rovinou symetrie) jde body $P_1$, $P_2$, $P_3$ (viz obr. 3a); je shodná s tou oblastí řecké roviny, v níž se může pohybovat bod $\Pi$ (viz obr. 3b s naznačeným vyšrafováním). Ten zvolen na hranici této eliptické oblasti vede k bodu $P$ na (obecně eliptickém) rovníku elipsoidu (viz obr. 3).

*Prof. RNDr. Zbyněk Nádeník, DrSc.*
*Libocká 262-14,*
*162 00 Praha 6*