Učitel matematiky

Hedvika Šimková

Japonské chrámové úlohy

Učitel matematiky, Vol. 11 (2003), No. 2, 114–120

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150848

JAPONSKÉ CHRÁMOVÉ ÚLOHY

Hedvika Šimková

Nejstarší období japonské matematiky je poněkud zahaleno tajemstvím. Víme jen, že v Japonsku byla, stejně jako v Číně, používána desítková soustava. Od počátku 7. století je doloženo počítání pomocí bambusových tyčinek a během dalšího století také počítání na počitadle s pohyblivými kuličkami, které se nayývalo *soroban*.

Japonská matematika se rozvíjela, podobně jako další japonské vědy a umění, pod silným čínským vlivem. O pravé japonské matematice můžeme hovořit až od počáku 17. století.

R. 1603 převzal v Japonsku moc Tokugawský šógunát a Japonsko se asi na 250 let uzavřelo vnějším vlivům, což bylo velmi dobře možné díky jeho poloze na několika ostrovech. V tomto období vznikla vlastní japonská matematika, tzv. *wasan*. Jejími nositeli se stali zejména vzdělaní samurajové. *Wasan* však nešla axiomatickými cestami jako matematika řecká, ani nebyla svázána s filozofií a přírodními vědami jako *josan* — matematika západního světa. Postupně ochabovaly čínské vlivy, které byly dříve poměrně silné, a *wasan* šla zcela samostatnou cestou.

Japonská renesanční geometrie

Japonská renesanční matematika se věnovala nejen praktickým dovednostem, jako bylo například počítání obsahů a objemů, ale měla i své matematiky — teoretiky.

Jošida Šičibei Koju (Micujoši) sepsal r. 1627 práci *Džinko-ki*. V tomto prvním vydání je obsaženo zejména mnoho geometrických úloh z praxe, v dalším, pětisvazkovém a bohatě ilustrovaném vydání, je také mnoho úloh tzv. rekreační matematiky.

R. 1639 publikoval *Imamura Čišó* studii, která byla věnována tehdy velmi oblíbenému tématu – pravidelným mnohoúhelníkům, a to od trojúhelníku až po desetiúhelník.

Jedním z nejznámějších japonských matematiků vůbec byl pravděpodobně *Seki Kowa* (1642–1708). Narodil se v rodině samuraje, ale záhy byl adoptován šlechtickou rodinou. Co se týče matematiky, byl tak trochu zázračné dítě. Od devíti let ho vyučoval sluha, který jeho talent objevil. Kowa si vybudoval rozsáhlou knihovnu japonských a čínských matematických spisů a stal se známým odborníkem. Bylo mu dokonce přiděleno jedno z čestných míst na šógunově dvoře. Řešil mnohé matematické problémy dřív, než k nim došla západní matematika. Zabýval se determinanty, Bernoulliovými čísly (ještě před Jacobem Bernoullim!), magickými čtverci a diofantickými rovnicemi. Řešil také geometrické úlohy; systematičnost řešení, pro Kowu tak charakteristická, byla vyzdvižena i jeho žákem *Takebem Kenkó*.

Japonský geometr Kenkó přispěl matematice *wasan* tzv. principem *enri* neboli kruhovým principem. Tento postup je podobný Eudoxově exhaustivní metodě, spočívá v dělení kruhu na určitý počet pravoúhelníků. Princip *enri* tak představuje jakéhosi orientálního předchůdce infinitesimálního počtu.

Sangaku

V letech 1639–1854 žilo Japonsko ve striktní izolaci od západního světa.

Ctitelé matematiky – samurajové, kupci i rolníci – řešili různé geometrické úlohy a svá řešení psali a kreslili na dřevěné tabulky, které věšeli pod střechy chrámů. Tyto *sangaku* (matematické tabulky) vyjadřovaly jednak poděkování bohům za pomoc při řešení problému, jednak byly výzvou pro další řešitele.

Zavěšování tabulek v chrámech jako prosbu bohům přineslo japonské náboženství šintoismus už v 15. století. Nejstarší *sangaku*, tabulka s geometrickou úlohou, pochází však až z roku 1683 a byla nalezena v prefektuře *Točigi*. Z dalších pramenů víme, že existovala *sangaku* dokonce z roku 1668, bohužel je nyní ztracena. Historici tedy odhadují počátek zvyku zavěšování *sangaku* na 2. pol. 17. stol. Dnes je k dispozici více než 880 *sangaku* a v historických pramenech jsou odkazy na mnoho dalších. Zdá se, že zvyk zavěšování *sangaku* se udržoval ve městech i na venkově, a to nejen v šintoistických, ale i v budhistických chrámech.

Hlavní roli v úlohách *sangaku* hraje většinou euklidovská geometrie, ale v poněkud jiném duchu, než jsme zvyklí. V problémech se objevují hlavně kružnice, elipsy a jejich vzájemné vztahy. Některé úlohy jsou velmi jednoduché, jiné se dnes moderní geometři pokoušejí řešit metodami infinitesimálního počtu nebo afinními transformacemi.

Dnes bychom většinu úloh *sangaku* zařadili do oblasti rekreační matematiky. Některé z úloh užívají matematických vět známých v západním světě. Všechny tabulky jsou malými uměleckými díly.

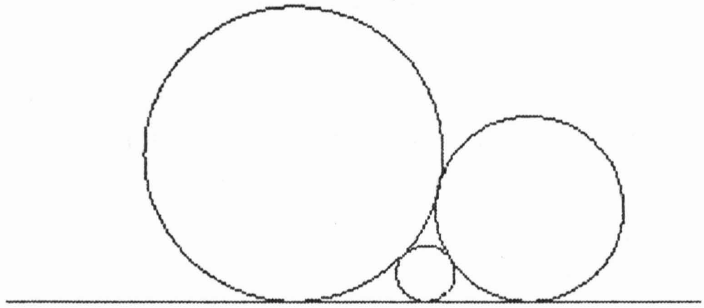
Geometrické úlohy sangaku

Sangaku zpravidla obsahují jednu nebo několik matematických vět s pestrobarevnými obrázky. Zobrazen je však pouze výsledek, většinou bez důkazu. Obvykle také nechybí jméno dárce a datum. V některých příkladech se *sangaku* věnují i negeometrickým problémům, například diofantickým rovnicím.

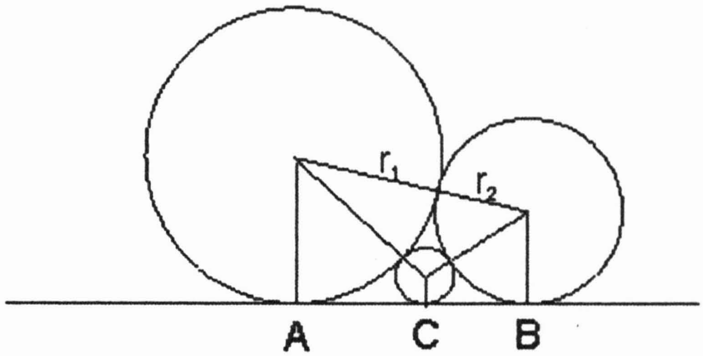
Ukažme na několika příkladech, jaké geometrické úlohy *sangaku* řeší.

Úloha 1: prefektura Gunma, r. 1824

Dvě kružnice mají vnější dotyk a společnou tečnu. Malá kružnice (viz obrázek) má s nimi společnou tečnu a vnější dotyk s oběma z nich. Jaký je vztah mezi poloměry všech tří kružnic?



Řešení: Označme poloměry jednotlivých kružnic r_1, r_2, r_3. Označme A, B, C dotykové body kružnic s jejich společnou tečnou.



Potom podle Pythagorovy věty je:

$$|AB| = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

$$|AC| = \sqrt{(r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2} = 2\sqrt{r_1 r_3}$$

$$|BC| = \sqrt{(r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2} = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

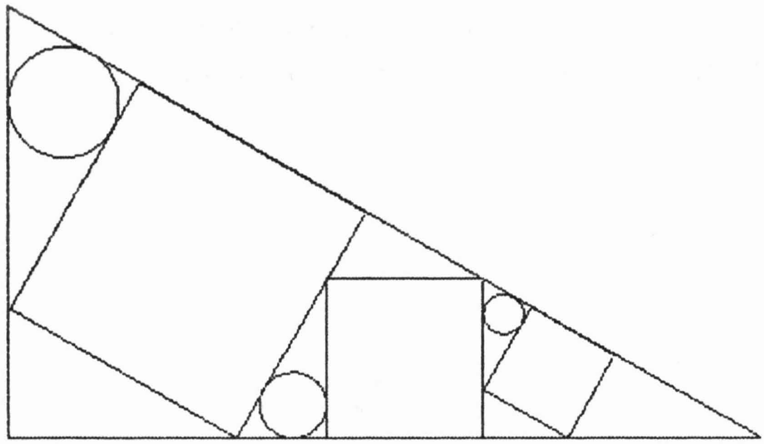
Protože je $|AB| = |AC| + |BC|$, je $\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3}$ a odtud

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

Touto rovností je dán hledaný vztah mezi poloměry všech tří kružnic.

Úloha 2: prefektura Mijagi, r. 1913

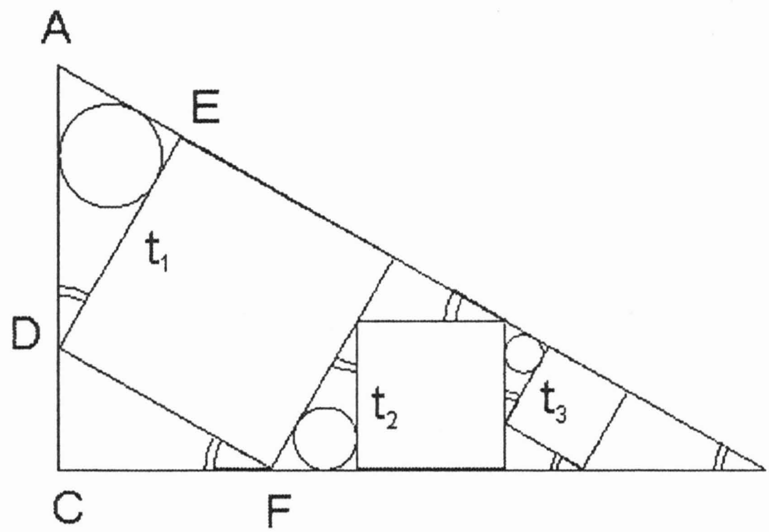
V pravoúhlém trojúhelníku jsou vepsány čtverce a kružnice takto:



Najděte vztah mezi poloměry tří kružnic.

Úloha, která se na první pohled zdá komplikovaná, je řešitelná pomocí elementárních znalostí středoškolské matematiky.

Řešení: Nejprve označme t_1, t_2, t_3 po řadě velikosti stran jednotlivých čtverců a uvědomme si, že všechny malé trojúhelníky, které vzniknou vepsáním čtverců, jsou navzájem podobné.



Všechny úhly označené dvojitým obloučkem mají tedy stejnou velikost ω. Z vlastností trojúhelníků ADE a DCF pak získáváme následující vztahy:

$$\cos\omega = \frac{t_1}{|AD|} \quad \text{a tedy} |AD| = \frac{t_1}{\cos\omega},$$

$$\sin\omega = \frac{|CD|}{t_1} \quad \text{a tedy} |CD| = t_1 \cdot \sin\omega.$$

Odtud

$$|AC| = t_1 \left(\sin\omega + \frac{1}{\cos\omega}\right).$$

Z podobnosti dalších trojúhelníků získáváme obdobné vztahy

$$t_1 = t_2 \left(\sin\omega + \frac{1}{\cos\omega}\right),$$

$$t_2 = t_3 \left(\sin\omega + \frac{1}{\cos\omega}\right).$$

Odtud $\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_2}{t_3}$ a tedy $t_2{}^2 = t_1 t_3$. Vzhledem k tomu, že poloměry vepsaných kružnic, označme je po řadě r_1, r_2, r_3, jsou díky podobnosti trojúhelníků ve stejném vzájemném poměru jako délky stran jednotlivých vepsaných čtverců, platí pro ně stejný vztah, tj. $r_2{}^2 = r_1 r_3$, který je řešením daného problému.

Mezi japonskými chrámovými úlohami však najdeme i příklady, které bychom neřešili elementární geometrickou úvahou, ale pomocí jednoduchých poznatků z infinitesimálního počtu.

Úloha 3: Prefektura Mijagi, r. 1912

V bodě P elipsy zkonstruujte normálu, která protne elipsu v dalším bodě Q. Najděte nejmenší možnou hodnotu vzdálenosti PQ.

Náznak řešení: Na první pohled by se mohlo zdát, že řešením bude vedlejší poloosa elipsy, ale není tomu tak. Nejpřirozenější je pro nás asi řešení pomocí analytické geometrie, které nám umožní vyjádřit vzdálenost bodů P, Q v závislosti na parametru a pomocí derivace určit minimum takové funkce.

Sangaku však neobsahují pouze planimetrické úlohy, uvádějí i mnoho úloh stereometrických, které jsou někdy poměrně náročné. Následující je jedna z těch jednodušších.

Úloha 4: r. 1825

Válcová plocha protíná kulovou plochu tak, že mají společnou tečnou rovinu. Určete povrch té části válcové plochy, která se nachází uvnitř kulové plochy.

Náznak řešení: Řešení je možné provést pomocí prostorové geometrické úvahy.

Závěr

Původní metody řešení japonských úloh *sangaku* nejsou dosud zcela objasněny. S našimi matematickými znalostmi jsou japonské chrámové úlohy zajímavými příklady, které nás často nutí uvažovat poněkud jiným způsobem, než u úloh evropských. Rozhodně však úlohy *sangaku* přispějí k postupnému odhalování vývoje orientální geometrie.

Literatura

[1] Bečvář J., *Hrdinský věk řecké matematiky II*, Historie matematiky II, Dějiny matematiky sv. 7, Prometheus, Praha, 7–28, 1997

[2] Rothman T., Fukagawa H., *Japanese Temple Geometry*, Scientific American, 1998, N.5

[3] Scriba C. J., Schreiber P., *5000 Jahre Geometrie*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2000

Mgr. Hedvika Šimková
doktorandka MFF UK v Praze
e-mail: hsim5503@mail.kolej.mff.cuni.cz