

# Učitel matematiky

---

Milada Kočandrlová

O parabole

*Učitel matematiky*, Vol. 12 (2004), No. 4, 204–211

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150840>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2004

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## O PARABOLE

MILADA KOČANDRLOVÁ

Řecký filozof Platón (asi 428 – 348 př. n. l.) se též zabýval řešením dvou problémů, které zaměstnávaly mnohé tehdejší filozofy. Prvním byla trisekce úhlu a druhý byl problém zdvojení krychle. Platón při hledání řešení těchto problémů pravděpodobně objevil kuželosečky a dal podnět k jejich studiu. Právě řešení úlohy zdvojení krychle pomocí průsečíků dvou parabol je připisováno Menaechmosovi (asi 380 – 320 př. n. l.), vrstevníku Platónově.

Parabola byla také první křivkou, jejíž kvadraturu, tj. určení obsahu plochy pod křivkou po osu  $x$ , se podařilo určit. Byl to především Platónův žák Deinostratos (asi 390 – 320 př. n. l.) a také Archimédes (asi 287 – 212 př. n. l.), kterým je připisováno první řešení.

Nejnámější vlastností paraboly je zřejmě rovnost odchylek její tečny od průvodičů. Proto paprsky rovnoběžné s osou paraboly se po odrazu od ní v ohnisku protínají a naopak paprsky z ohniska vycházející jsou rovnoběžné s její osou. Této vlastnosti je využíváno při konstrukci parabolických zrcadel, drobnohledů i dalekohledů, svítlen, ale i při konstrukci kleneb pro dobrou akustiku sálů.

My si uvedeme nejdříve tečnovou konstrukci paraboly a její využití ve statice a několik dalších možností využití paraboly v praxi.

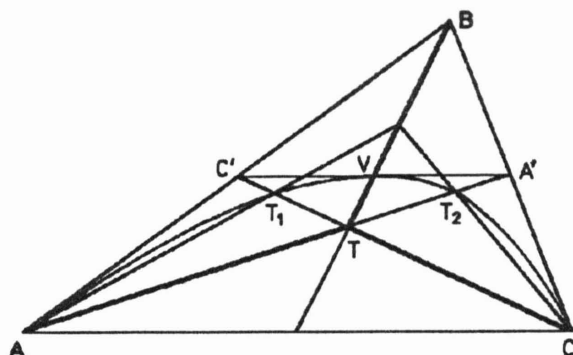
### 1. Bodová rovnice, tečnová a Artztova konstrukce paraboly

Parabola je určena dvěma tečnami  $AB$  a  $BC$  s body dotyku  $A$  a  $C$ , obr. 1. Rozdělíme-li úsečky  $AB$  a  $BC$  ve stejném poměru, určují správně spojené dělicí body tečny paraboly (na obou tečnách dostáváme podobné řady bodů, viz [3]). Pro dělicí bod  $P$  úsečky  $AB$  platí

$$P = A + t(B - A), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

To je symbolický zápis, nebo bodová rovnice úsečky, pro souřadnice bodu  $P$  v závislosti na parametru  $t$ . Proto jej lze přepsat na tvar

$$P = (1 - t)A + tB.$$



Obr. 1

Analogicky můžeme zapsat dělicí bod  $Q$  úsečky  $BC$

$$Q = (1 - t)B + tC$$

a dělicí bod  $X$  úsečky  $PQ$

$$\begin{aligned} X &= (1 - t)P + tQ = \\ &= (1 - t)[(1 - t)A + tB] + t[(1 - t)B + tC], \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (1) \end{aligned}$$

Bod  $X$  je bodem dotyku tečny  $PQ$  s parabolou určenou tečnami  $AB$  a  $BC$ . Konstrukce je zřejmá z rovnice (1). Úpravou rovnice (1) dostaneme jiné vyjádření bodů parabolického oblouku mezi body  $A, C$

$$X = (1 - t)^2 A + 2t(1 - t)B + t^2 C, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Pomocí bodové rovnice (1) snadno ověříme Artzovu bodovou konstrukci paraboly, která využívá těžiště trojúhelníku.

Těžiště trojúhelníku  $ABC$  je bod  $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$ . Bod  $T$  určuje dva trojúhelníky  $ABT$  a  $CBT$ . Pro jejich těžiště  $T_1, T_2$  platí

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{3} (A + B + T) = \frac{1}{9} (4A + 4B + C) = X \left( \frac{1}{3} \right), \\ T_2 &= \frac{1}{3} (C + B + T) = \frac{1}{9} (4C + 4B + A) = X \left( \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Oba body podle (1) leží na oblouku paraboly vepsaném do trojúhelníku  $ABC$ , obr.1.

Střední příčka  $A'C'$  v trojúhelníku  $ABC$  a její střed  $V$  je tečna s bodem dotyku oblouku. Stačí tedy znát dva body parabolického oblouku a tečny v nich a můžeme touto konstrukcí najít další jeho body.

## 2. Momentová parabola prostého nosníku

Rovnoměrné zatížení prostého nosníku  $AB$  způsobují kolmé vnější síly po jeho jedné straně. Všechny tyto síly můžeme složit ve výslednici  $Q = ql$ , působící v těžišti nosníku, kde  $q$  je rovnoměrné zatížení na délkovou jednotku a  $l$  je délka nosníku. Síla  $Q$  vyvolává v patkách  $A, B$  nosníku stejně velké reakce  $Q_A = Q_B = \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}ql$ . Vnější síly v bodech příčného průřezu  $X$  v něm vyvolávají posouvací sílu  $T = q(\frac{1}{2}l - x)$ , jejíž velikost roste od těžiště k patkám lineárně. Součet statických momentů vnějších sil v bodech řezu  $X$  k těžišti části  $XB$  nosníku je ohybovým momentem  $M = \frac{1}{2}qx(l-x)$ . Funkce  $M$  proměnné  $x$  ( $x = |AX|$ ) je kvadratická funkce s derivací  $M' = T$ . Největší moment je uprostřed nosníku, tj. pro  $x = \frac{1}{2}l$ , tedy  $M_m = \frac{1}{8}ql^2$  je ve vrcholu paraboly nad tětivou  $A'B'$ , obr.2. Její rovnice je

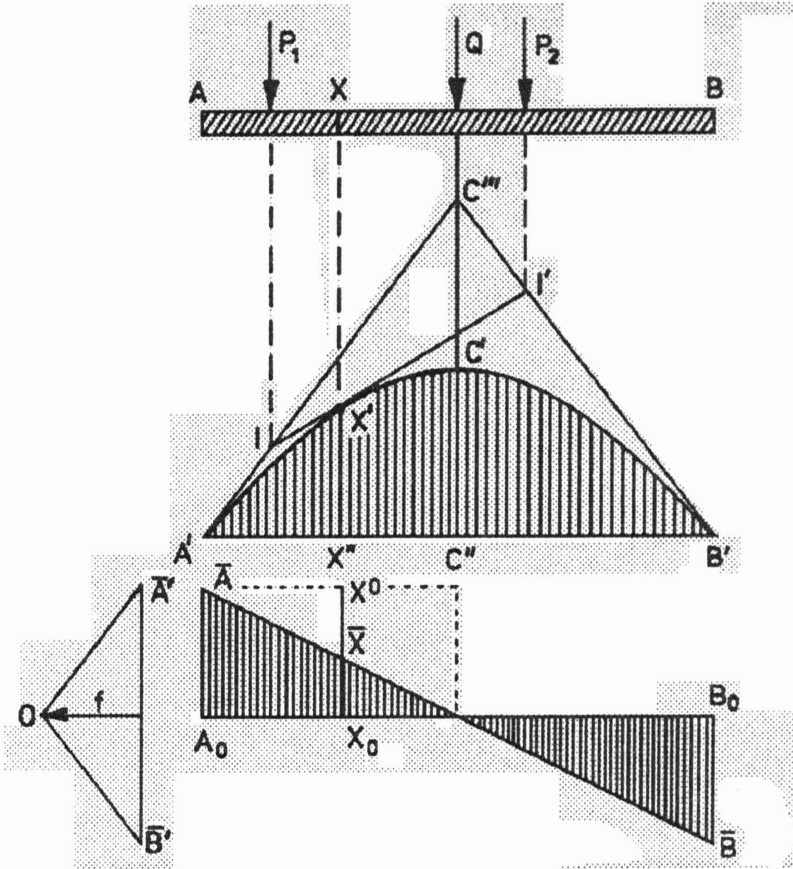
$$\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 = -\frac{2}{q} \left(y - \frac{1}{8}ql^2\right). \quad (2)$$

V jednotlivých řezech  $X$  se ohybový moment i posouvací síla určí z momentového obrazce vymezeného parabolou (2) a složkového trojúhelníku. Výsledné břemeno  $Q$  znázorníme úsečkou  $\bar{A}\bar{B}'$ , na její ose zvolíme pól  $O$ .

Sestrojíme výslednicovou čáru  $A'B'C'''$ , kde  $|A'B'| = |AB|$ ,  $A'C''' \parallel O\bar{A}'$ ,  $B'C''' \parallel O\bar{B}'$ . Do trojúhelníku  $A'B'C'''$  vepíšeme parabolický oblouk  $A'C'B'$ . Zatížení na částech  $AX$  a  $XB$  nosníku nahradíme břemeny  $P_1, P_2$  působícími v jejich těžištích.

Rovnoběžky se svislou osou vedené těžišti určují na ramenech výslednicové čáry  $A'C'''B'$  podobné přímé řady bodové  $I, II, \dots$  a  $I', II', \dots$  pro parabolický oblouk. Bod dotyku  $X'$  na tečně  $II'$  je na ordinále  $XX'$ , obr.2. Moment  $M_X$  v bodě  $X$  je potom

$M_X = f \cdot |X'X''|$ , kde  $f$  je vzdálenost pólu  $O$  od úsečky  $\bar{A}'\bar{B}'$ .  
 (Na osách  $x$  a  $M$  v grafu paraboly nejsou stejná měřítka, výška  $f$  složkového trojúhelníka byla vhodně volena.)



Obr. 2

Čára posouvací síly  $T$  je úsečka  $\bar{A}\bar{B}$ , kde  $|A_0\bar{A}| = |B_0\bar{B}| = \frac{1}{2}ql$ .  
 V průřezu  $X$  je zatížení  $Q_X = |\bar{X}X^0|$  a posouvací síla  $T = |\bar{X}X_0|$ .

### 3. Parabolické prstence klenbových přehrad

V r. 1961 při navrhování klenby přehrady Moiry ve Švýcarsku architekt A. Stucky uvedl tři důvody pro použití parabolického oblouku:

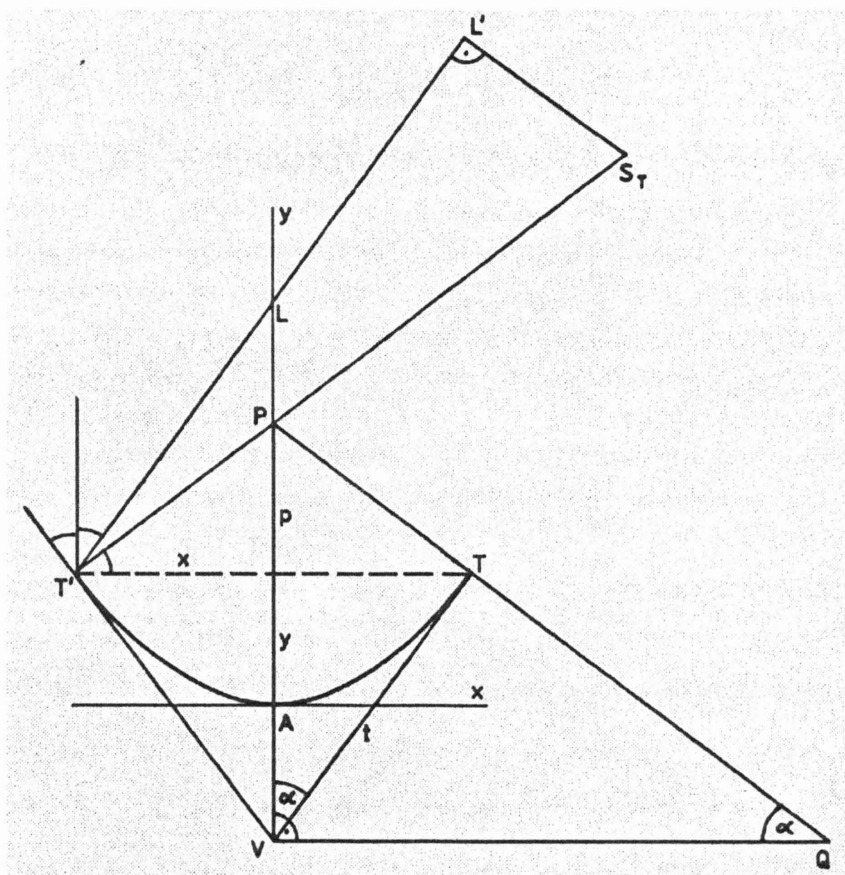
1. umožňuje plynulé navázání vlastní konstrukce klenby na tížné opěrné prvky v bocích údolí;
2. v patkách má menší křivost než oblouky kruhové;
3. napětí v lících parabolické klenby je rovnoměrnější.

Při navrhování parabolického oblouku se vychází z odchytky  $\alpha$  tečny  $t$  od osy a parametru  $p$  paraboly (viz [4]). Z těchto hodnot se počítají souřadnice bodu  $T$ , poloměr křivosti v bodě  $T$  a délka  $t$  tečny pomocí úhlu  $\alpha$ , obr.3.

Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, že osa  $y$  je osou paraboly a vrchol  $A$  je v počátku, pak rovnice parabolického oblouku je  $x^2 = 2py$ .

Pro souřadnice bodu  $T$  platí

$$x = p \cotg \alpha, \quad y = \frac{1}{2} p \cotg^2 \alpha.$$



Obr. 3

Délka tečny je  $t = |VT| = \frac{x}{\sin \alpha}$ . Poloměr křivosti bodu  $T$  je  $r = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''} = \frac{p}{\sin^3 \alpha}$ , kde  $y' = \frac{x}{p}$ ,  $y'' = \frac{1}{p}$ .

Snadno se přesvědčíme, že poloměru  $r$  je rovna přepona  $PQ$  v pravoúhlém trojúhelníku  $VPQ$  a také přepona v pravoúhlém trojúhelníku  $T'L'S_T$ , kde  $L$  je střed odvěsny  $T'L'$ .

#### 4. Biliár a parabola

Ve svislém kruhu je z jeho nejnižšího bodu  $N$  vymrštěna hmotná kulička po jeho hranici (viz [2]). Určíme bod hranice, ve kterém se kulička musí odtrhnout, aby se vrátila do výchozího bodu  $N$ , obr.4.

Pohyb bodu  $M$  po kružnici s úhlovou rychlostí  $\omega(t)$  popíšeme bodovou rovnicí

$$M(t) = [r \cos \omega(t), r \sin \omega(t)].$$

Vektor rychlosti bodu  $M(t)$  je tečným vektorem kruhové dráhy

$$\mathbf{v}(t) = r\omega'(t)(-\sin \omega(t), \cos \omega(t)).$$

Vektor zrychlení má dvě složky, tangenciální a normálovou

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) = r\omega''(t)(-\sin \omega(t), \cos \omega(t)) + \\ + r(\omega'(t))^2(-\cos \omega(t), -\sin \omega(t)). \end{aligned}$$

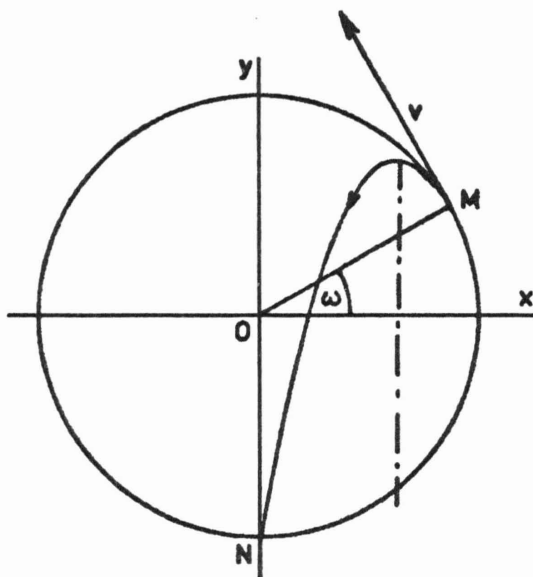
Z kružnice přejde bod  $M$  na parabolu v čase  $t_0$  v okamžiku, kdy normálová složka vektoru zrychlení  $\mathbf{a}(t)$  a gravitačního zrychlení se sobě rovnají:  $r(\omega'(t_0))^2 = g \sin \omega(t_0)$ , tj.

$$v_0^2 = rg \sin \omega_0,$$

kde  $v_0 = |\mathbf{v}(t_0)| = r\omega'(t_0)$ .

Parabolickou dráhu kuličky popíšeme rovnicí

$$P(t) = [r \cos \omega_0, r \sin \omega_0] + tv_0(-\sin \omega_0, \cos \omega_0) + (0, -\frac{1}{2}gt^2).$$



Obr. 4

Kulička bude v nejnižším bodě  $N$ , jestliže  $P(t) = [0, -r]$ . Dostáváme tak soustavu dvou rovnic pro neznámé  $t$  a  $\omega_0$

$$r \cos \omega_0 - tv_0 \sin \omega_0 = 0$$

$$r \sin \omega_0 + tv_0 \cos \omega_0 - \frac{1}{2}gt^2 = -r.$$

Z první rovnice vypočítáme  $t$  a dosadíme do rovnice druhé

$$t = \frac{r \cos \omega_0}{v_0 \sin \omega_0}$$

$$0 = (\sin \omega_0 + 1)(2 \sin^2 \omega_0 + \sin \omega_0 - 1).$$

Poslední rovnice má tři řešení

$$\omega_0 = -\frac{1}{2}\pi, \quad \omega_0 = \frac{1}{6}\pi, \quad \omega_0 = \frac{5}{6}\pi.$$

První řešení podmínkám úlohy nevyhovuje a pro další dvě řešení dostáváme dva body, jeden pro pohyb proti směru a druhý pro pohyb ve směru chodu hodinových ručiček

$$M = \left[ \frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{1}{2}r \right], \quad M = \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{1}{2}r \right].$$



## Literatura

- [1] Bažant, Z., Klokner, F., *Statika stavebních konstrukcí*, SNTL, Praha, 1953.
- [2] Berger, M., *Géométrie, 2. díl*, Paris, 179–180, 1977.
- [3] Havlíček, K., *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL, Praha, 1956.
- [4] Ježdík, T., *Oblouky proměnlivé křivosti k trasování*, vlastním nákladem, Praha, 1934.

*Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.*  
*Katedra matematiky, Fakulta stavební ČVUT,*  
*Thákurova 7*  
*166 29 Praha 6*  
*e-mail: Milada.Kocandrlova@fsv.cvut.cz*