

Učitel matematiky

Jaroslav Perný

Krychle, pohyb a prostorová představivost (2)

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 4, 221–230

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150837>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2004

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

KRYCHLE, POHYB A PROSTOROVÁ PŘEDSTAVIVOST II

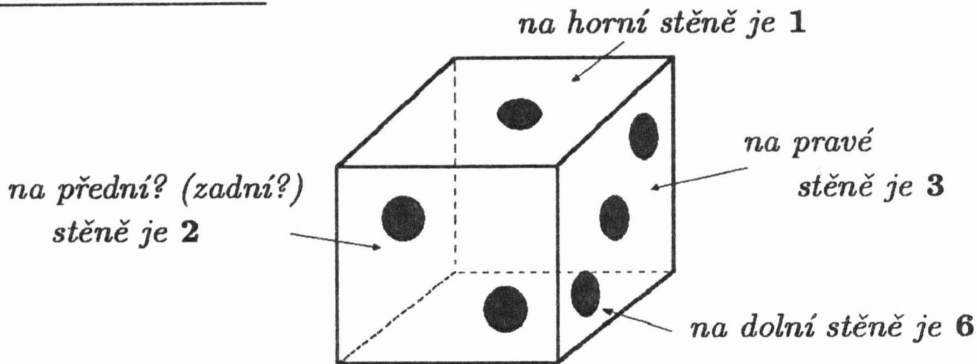
JAROSLAV PERNÝ

Jak již bylo zmíněno v článku „Krychle, pohyb a prostorová představivost I“, měli bychom při výuce matematiky hledat různé cesty k posilování a zlepšování úrovně prostorové představivosti většiny žáků a studentů, a tím přispívat k odstraňování problémů, které mají při řešení prostorových úloh. Jednou z nich je zařazování jednoduchých úloh na rozvíjení prostorové představivosti, které lze bez větší návaznosti na učivo volně zařazovat do vyučování jako hry či rozcvičky, a to i pro žáky 1. stupně ZŠ. Snahou přitom je, aby to byly úlohy, které nevyžadují pro žáky méně známé plošné znázornění prostorových objektů, ale spíše aby řešení probíhalo pouze v představě žáka.

V první části článku jsme představili jednu úlohovou situaci v prostředí „krychle a pohyb“, „procházky po krychli“. Zde se podíváme na další situaci ze stejného prostředí, tzv. „odvalování hrací kostky“. Na tuto situaci byl vytvořen pokud možno obdobný soubor úloh jako na předchozí „procházky po krychli“ a tyto byly experimentálně ověřeny s 9–14letými žáky.

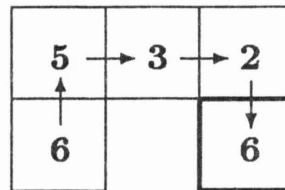
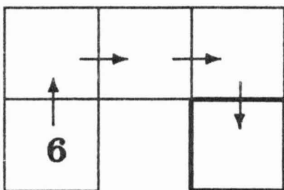
Při řešení úloh úlohové situace „odvalování hrací kostky“ žák pouze ve své představě podle hracího plánu „převrací“ hrací kostku přes její hrany a sleduje stěnu, na kterou se kostka položí.

Žákům je vysvětlen úkol a domluví se počáteční základní poloha hrací kostky a potřebná terminologie názvů stěn a směrů pohybu. Po nácviku, kdy mohou žáci manipulovat kostkou, následuje řešení úloh jen v představě. Žáci kostku sice vidí, ale nemohou s ní manipulovat. Na připraveném papíru je hrací plán s pokyny, podle něhož zapisují do plánu jednotlivé kroky „cesty“.

Počáteční polohaIlustrativní příklad (návčikový):

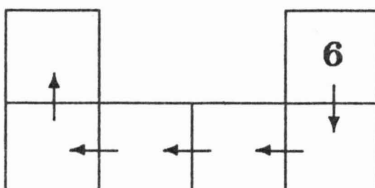
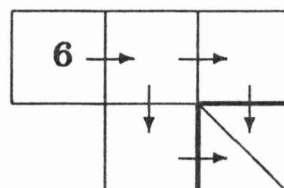
Učitel říká: „Začínáme kostkou v počáteční poloze, převracíme kostku podle šipek na hracím plánu a zapisujeme průběžně hodnoty na dolní stěně.“

Žák řeší a zapisuje hodnoty do hracího plánu.

Řešení:

Potom žáci řeší soubor úloh různého typu, délky a obtížnosti. Experimentálně ověřeny byly úlohy, kdy žák „odvaluje“ hrací kostku podle šipek na hracím plánu a zapisuje hodnoty na dolní stěně kostky (typ A), a úlohy, kdy žák podle sledu hodnot zapisuje do plánu šipky, podle nichž se má kostka na uvedené hodnoty odvalit (typ B). Oba typy úloh budou ilustrovány níže.

Příklady úloh (Úplný soubor úloh je možno nalézt v práci [4].)

Úloha A2a:Úloha A4a:

Úloha B5a:

(Převracej na dané hodnoty a zapisuj do plánu šipky.)

$$6 - 3 - 2 - 1$$

		6		

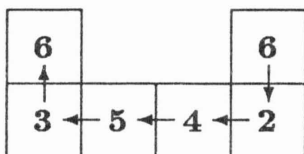
Úloha A2 sleduje, jak žák zvládá myšlenkové „převrácení“ hrací kostky podle hracího plánu, zda správně, které kroky jsou pro něho obtížné, jak si při tom pomáhá, zda využívá poznatků z nácviku, případně zda objevil a využívá některých pravidelností při odvalování.

Úloha A4a sleduje, kromě zvládnutí myšlenkového „převrácení“, kterou ze dvou možností různé obtížnosti volí žák jako první a zda objeví a využije další z pravidelností při odvalování.

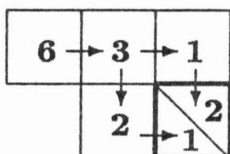
Úloha B5a je jiného („inverzního“) charakteru a předchází ji krátký nácvik s možností manipulace s kostkou. I zde se zjišťuje, zda žák využije poznatků z předchozích úloh, či objeví a využije další z pravidelností při odvalování.

Řešení:

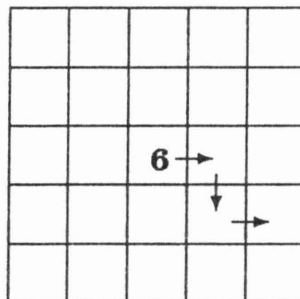
Úloha A2a:



Úloha A4a:



Úloha B5a:



Učitelé mohou při vytváření těchto úloh volit různý počet kroků cesty (3–7), různě střídat odvalování bez změny směru a se změnou směru odvalování, mohou volit i odvalování uzavřené (koniec stejný se začátkem). Mohou sledovat, čím a jak si žáci při řešení úloh pomáhají, co všechno sledují, jak hodně využívají předešlý nácvik, zda objevili určité pravidelnosti v odvalování a jak je využívají, v čem dělají chyby, co je pro ně obtížné atd.

Experimentální ověřování těchto úloh probíhalo s jednotlivými žáky individuálně, nerušeně v místnosti, průběh byl zaznamenáván na magnetofonový pásek. Z něho, z testového listu a z písemných poznámek experimentátora (autora) o neakustických reakcích žáka byl vytvářen detailní protokol. V závěru proběhl řízený rozhovor s žákem. Vlastní experimentálně ověřovaný soubor měl pět úloh, každá s částí a) a b).

Údaje získané z testových listů a protokolů byly dále zpracovány do tabulek a grafů. Na základě jejich analýzy byly ověřovány různé hypotézy a zjišťovány některé významné jevy ovlivňující úspěšnost řešení žáků.

Určení tzv. teoretické obtížnosti kroků cesty

Pro porovnání získaných výsledků byla obtížnost jednotlivých kroků cest ohodnocena podle toho, zda je to první krok ze základní polohy kostky (1 bod), nebo kroky další, zda směr pohybu odvalování kostky trvá (1 bod), nebo zda se směr odvalování kostky mění (2 body), zda jsou změny směru dvě (3 body), či jestli jsou v posledních krocích delší cesty (+1 bod). Tyto body jsou vyjádřeny v procentech úspěšnosti 1 bod – 90%, 2 body – 70%, 3 body – 50% atd.

Tab. 1 Porovnání obtížnosti úlohy A2a

	Ročník	Teoretická obtížnost kroku (v bodech)				
	D/H	90	90	70	70	50
Skutečná úspěšnost	6 H	100	100	50	100	17
	6 D	100	92	17	83	0
	5 H	100	83	50	83	9
	5 D	92	100	17	83	0
	4 H	100	100	75	100	75
	4 D	100	100	75	75	100
	3 H	100	100	25	100	50
	3 D	100	100	0	100	25

Šetření s žáky 3., 4., 5., 6. roč. (H – hoši, D – dívky)
 Nahoře „teoretická“ obtížnost. Průměrná úspěšnost v %.
 Rozdíly proti předpokladu jsou vyznačeny stínováním,
 malé světlým, velké tmavým.

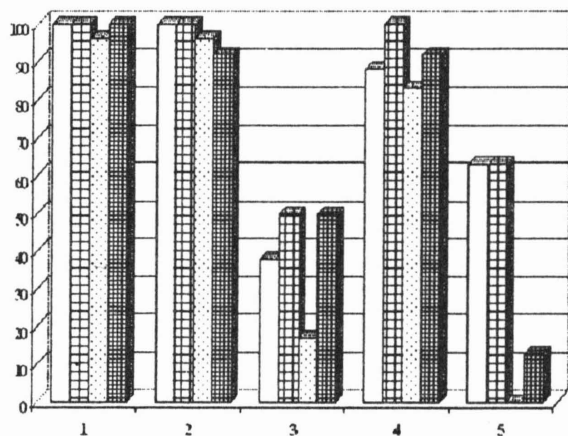
Z tabulky je patrné, že čtvrtý krok byl oproti předpokladu snazší, zatímco třetí a pátý krok byl obtížnější než předpoklad (světle či tmavě šedé stínování), kromě 4. ročníku, kde žáci více využili pravidelnosti při odvalování.

Grafické vyjádření úspěšnosti řešení úloh

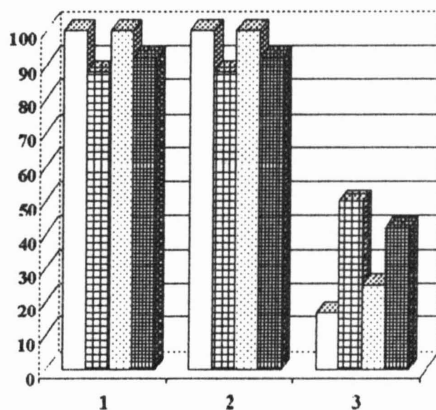
Pro porovnání úspěšnosti řešení mezi hochy a dívkami a mezi staršími a mladšími žáky byly výsledky vyjádřeny graficky. Na vodorovnou osu jsou nanášeny jednotlivé kroky a na svislou úspěšnost řešení kroku v procentech.

Úspěšnost řešení úloh v %

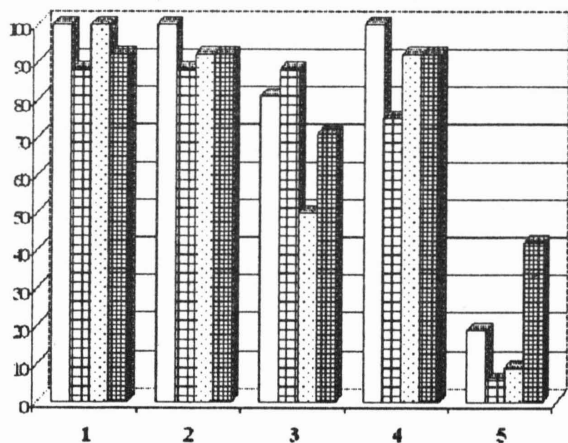
Graf 1: Úloha A2a



Graf 3: Úloha B5a



Graf 2: Úloha A4a



Legenda:

- mladší dívky
- mladší hoši
- starší dívky
- starší hoši

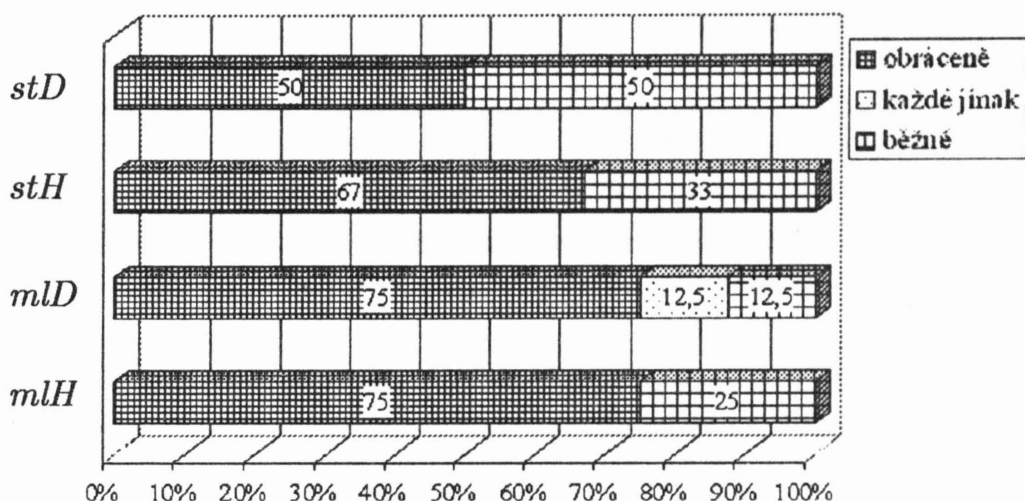
Některá další zjištění, která vyplynula z experimentů

- Potvrzuje se, že nejobtížnější jsou kroky s více změnami směru odvalování a kroky na konci delší cesty (*Tab. 1*).
- Chlapci jsou většinou úspěšnější než dívky, v obtížnějších krocích nejsou mladší žáci méně úspěšní než starší (*Graf 1, Graf 2*).
- V případě dvou možností volí většina žáků jako první tu snadnější, druhou tu obtížnější.
- Podobně jako u „procházek po krychli“ i zde byly zjištěny potíže se směrem pohybu dopředu-dozadu, zejména u mladších žáků převažuje směr odvalování kostky blíž k žákovi jako „dopředu“ a od žáka dál jako „dopředu“. Značná vázanost na testový papír místo na model se v těchto úlohách projevila tím, že místo dál od sebe uváděli „nahoru“ a místo blíž k sobě uváděli „dolů“ (*Graf 4*).
- U žáků se opět potvrzuje výrazná potřeba pohybu při „odvalování“, mladší si silně pomáhají oběma rukama, starší méně nápadně hlavou, řada žáků kombinuje více pohybů. Někteří si pomáhají i hlasem (*Graf 5*).
- Ukázalo se, že někteří žáci při řešení úloh nebo při jeho kontrole využívali kromě prostorové představivosti také určité pravidelnosti, které objevili při odvalování hrací kostky, někteří dokonce, aniž si to uvědomovali („tacit knowledge“).

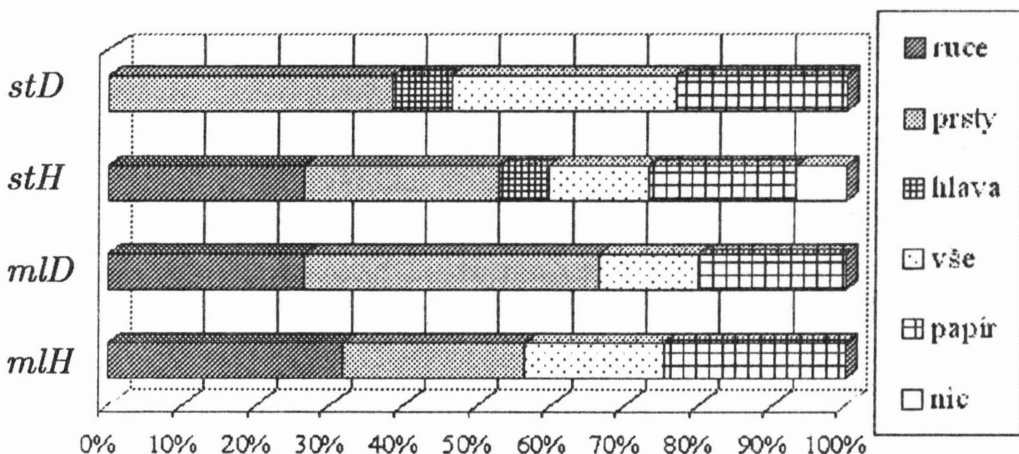
Příklady pravidelností

- Při odvalování kostky beze změny směru je součet hodnot na hracích polích „ob jedno“ roven 7.
- Následuje-li při odvalování po změně směru zpětná změna směru (i s několika mezikroky), je hodnota na hracím poli před první změnou a po zpětné změně stejná.
- Odvalování obtížnější cesty úlohy ÚA4 je analogické s odvalováním „obrácené“ úlohy ÚB5.
- Při odvalování dvěma cestami v úlohách ÚA4 se hodnoty vzájemně vymění 1–2 za 2–1.

Graf 4: Chápání stěn a směrů dopředu – dozadu u OHK (v %)



Graf 5: Účast pohybu při řešení úloh OHK (v %)



Některá zjištění společná pro oba soubory úloh v prostředí „krychle a pohyb“ („procházký po krychli“ a „odvalování hrací kostky“)

Srovnávací a atomární analýza výsledků obou souborů úloh („Procházký po krychli“ a „odvalování hrací kostky“) z prostředí „krychle a pohyb“ vedla k identifikování některých společných jevů, které mohou být rozhodující pro žákovu úspěšnost řešení podobných úloh.

- **Jev jazykový** se týká rozdílného chápání terminologie popisu stěn (přední a zadní) a směrů pohybu (dopředu a dozadu).
Ukazuje se, že chápání terminologie námi běžně používané je u některých žáků, zejména mladších, obrácené a že se toto chápání někdy mění u téhož žáka i v průběhu experimentu či při zátěžové situaci, že se liší u dívek a chlapců, že se mění s věkem, i že u někoho jakási nejistota v tomto chápání terminologie přetrvává i řadu let. To vše může způsobovat při komunikaci učitele s žáky řadu nedorozumění.
- **Jev konkrétnosti představy** se týká rozdílné představy modelu krychle u žáka podle typu prováděné úlohy. Zda potřebuje vidět skrz krychli (průhledný), nebo přejít po stěně (plný).
Ukazuje se zde význam vlastní zkušenosti žáka a důsledek používání někdy jednostranného typu modelu těles i jeho nahrazení plošným obrázkem.
- **Jev kinestetický** se týká účasti pohybu těla nebo jeho částí, často i bezděčného, při řešení těchto typů úloh.
Tato potřeba pohybu se projevila prakticky u všech zkoumaných osob, pro některé byla přímo nezbytná, jiní ji částečně skrývali.
- **Jev trvání krátkodobé paměti** se týká zapamatování předchozího řešení a jeho znovuvybavení.
Tento fenomén se uplatňoval u obou souborů úloh. U obtížnějšího „odvalování“ si často žáci pomáhali hlasem, kdy hlasitě komentovali průběžné polohy hrací kostky.
- **Jev využití pravidelností** se týká objevení určitých pravidelností při řešení, které žáci využívali spíše pro kontrolu své prostorové představivosti, ne pro vlastní řešení. K tomu by asi docházelo až při dalším řešení úloh.
Tyto pravidelnosti se objevily až při druhém souboru úloh „odvalování hrací kostky“. Žáci je nazvali „ob jedno 7“ (součet hodnot ob jedno pole, nemění-li se směr), „stejně číslo“ (při druhé zpětné změně směru), „výměna“ (jde-li se na totéž pole různým způsobem), „přenos“ (využije-li se dané pravidlo i v jiné úloze).

Závěrečná doporučení

Domníváme se, že výše uvedené jevy jsou cenným zdrojem informací pro učitele. Jazykový jev může znamenat, že žákova chyba či neúspěch není způsobena jeho neschopností nebo nízkou úrovní prostorové představivosti, ale může být důsledkem komunikačního nedorozumění, rozdílností chápání používané terminologie pedagogem a žákem. Těchto nesouladů chápání terminologie učitelem a žákem se v matematice může vyskytovat více.

Z jevu konkrétnosti představy vyplývá, že je třeba při výuce používat již od nejnižších tříd rozmanité typy modelů, nejenom ty nejzákladnější, které bývají běžně k dispozici, protože, jak se dalo očekávat, hraje to v rozvíjení prostorové představivosti významnou úlohu.

Velmi významnou roli při řešení těchto úloh má pohyb, kterým si žáci pomáhají. Téměř u všech bylo patrné, že své řešení úloh doprovázejí pohybem nějaké části svého těla, někdy i bezděčně nebo tajně. Tento jev kinestetického kontextu souvisí do značné míry s propojením prostorové představivosti a pohybu, které zmiňuje řada autorů z oblasti kognitivní psychologie a má rovněž význam pro diagnostiku a edukaci žáků.

Při řešení těchto úloh se kromě prostorové představivosti uplatňuje i paměť, což souvisí s jevem trvání krátkodobé paměti. Někteří žáci si pomáhají při představě průběžných poloh i hlasem a napomáhají tak své paměti. Významnou úlohu zde hrála určitě i schopnost soustředění. Tyto úlohy na zapamatování si a opakování cesty mají opět význam pro diagnostikování i edukaci žáků.

V úlohách na odvalování hrací kostky jde o vzájemné propojení geometrie, aritmetiky a pohybu, což je pro žáky velmi významné. V souvislosti s tím je důležité, zda žák ve strategii řešení upřednostňuje vlastní prostorovou představivost při odvalování kostky nebo „trik“ spočívající ve využití určitých pravidelností při odvalování. Tento jev by mohl být využit pro diagnostiku a edukaci žáků jednak v oblasti vytváření myšlenkových struktur, ale i metod jak doplnit prostorovou představivost či kompenzovat její některé nedostatky při řešení úloh jinými prostředky. Zde se uplatňují spíše přístupy konstruktivní a metody zkoumání, které mo-

hou být využity i v jiných oblastech výuky matematiky a mají pro žáky význam nejen pro rozvíjení prostorové představivosti, ale i logického myšlení.

Šetření potvrzují, že podobné úlohy napomáhají rozvoji prostorové představivosti a jsou žáky kladně přijímány. Je vhodné je zařazovat do výuky matematiky, i když není přímo probíráno geometrické učivo, a je možno přiměřeným způsobem začít již na 1. stupni základní školy. Ku prospěchu je přitom zde možno využít nejen přirozené hravosti mladších žáků, ale i toho, že v tomto věku není úroveň prostorové představivosti chlapců a dívek nijak zvlášť rozdílná.

Literatura

- [1] Gavora, P., *Výzkumné metody v pedagogice*, Paido, Brno, 1996.
- [2] Hejný, M., *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava, 1991.
- [3] Perný, J., Prostorová představivost na krychli, *In: Matematika v přípravě učitelů elementární školy*, Acta Universitatis Purkynianae, Ústí nad Labem, 2000.
- [4] Perný, J., *Prostorová představivost v prostředí „krychle a pohyb“*, *Dizertační práce*, Praha, 2001.

PaedDr. Jaroslav Perný, Ph.D.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky FP TUL,

Voroněžská 13

460 00 Liberec

e-mail: jaroslav.perny@vslib.cz