Lenka Vojteková

Hexaflexagóny, ktoré sa dajú poskladať z pásika papiera

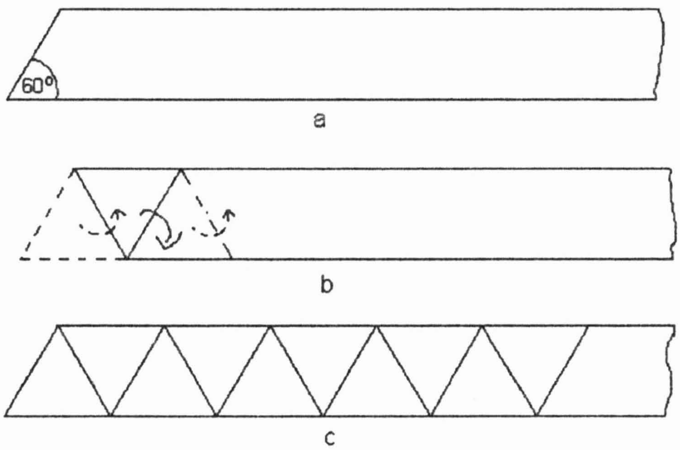
Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 3, 158–164

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150831`

HEXAFLEXAGÓNY, KTORÉ SA DAJÚ POSKLADAŤ Z PÁSIKA PAPIERA

Lenka Vojteková

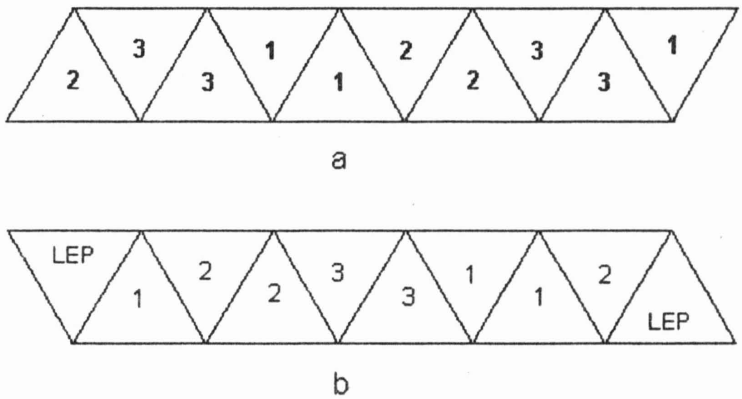
Podobne, ako v prvom článku o flexagónoch môžem položiť otázku: „Čo je to Hexaflexagón?“ Už asi viete, čo znamená slovo „flexagón“ („flex“ je po anglicky ohýbať), no a „hexa“ znamená v latinčine šesť, teda hexaflexagón, je taký flexagón, ktorý má 6 strán, teda má tvar šesťuholníka.



Obr. 1: Zostrojenie matrice hexaflexagónu

Najjednoduchším z hexaflexagónov je, podobne ako u tetraflexagónov, tri-hexaflexagón. Ukážeme si, ako sa dá zostrojiť. Podobným spôsobom, ako tento najjednoduchší, sa potom skladajú aj zložitejšie hexaflegóny vyšších rádov. Ako matrica na zostrojenie hexaflexagónov nám poslúži dostatočne dlhý obdĺžnikový pásik papiera s šírkou cca 3 cm. Na zostrojenie tri-hexaflexagónu stačí mať tento pásik cca 25-30cm dlhý, no na hexaflexagóny vyšších rádov treba pásik dlhší. Tiež treba vziať v úvahu, že čím väčšiu šírku bude mať pásik, tým bude musieť byť dlhší. Jeden koniec pásika zostrihneme tak, aby smer strihu zvieral s okrajom pásika uhol 60° (obr 1a). Ak potom tento vrchol ohneme do zadu a priložíme k protiľahlému okraju pásika tak, aby jedno rameno 60°-uhla splývalo s týmto okrajom, vznikne na pásiku rovnostranný trojuholník (s novým 60°-uhlom). Pokračujeme ďalej podľa obrázka 1b a ohneme novovzniknutý 60°-uhol dopredu tak, aby jeho rameno splývalo s protiľahlým okrajom pásika a vznikol ďalší rovnostranný trojuholník a s ním ďalší 60°-uhol, ktorý opäť ohneme dozadu, ďalší zasa dopredu, a tak ďalej, až kým na pásiku nedostaneme dostatočný počet rovnostranných trojuholníkov.

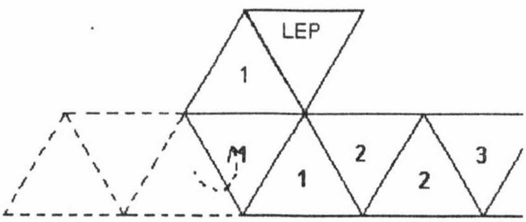
Koľko trojuholníkov potrebujeme na zostrojenie tri-hexaflexagónu? To môžme ľahko spočítať. Keďže je to **hexa**flexagón, každá jeho tvár bude mať tvar šesťuholníka zloženého zo šiestich rovnostranných trojuholníkov a keďže je to **tri**-hexaflexagón, tak bude mať tri „tváre". Teda $6 \times 3 = 18$ a ešte $+2$ trojuholníky na zalepenie, takže spolu 20. Ale náš pásik má trojuholníky na oboch stranách (prednej aj zadnej), teda nám nezostáva nič iné len výsledok vydeliť dvoma, a dostaneme odpoveď na vyššie položenú otázku.



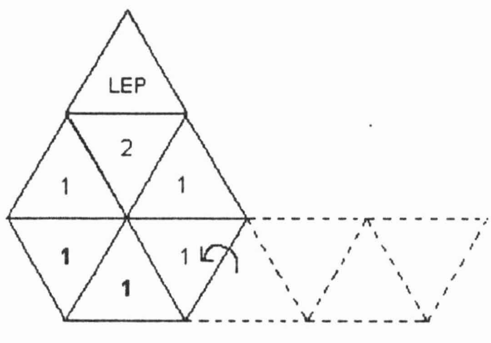
Obr. 2: Matrica tri-hexaflexagónu

Keď už teraz máme vyrobenú matricu, môžme ju očíslovať podľa obrázka 2 (a - predná strana, b - zadná strana). Trojuholníky s rovnakými číslicami budú spolu tvoriť jednu šesťuholníkovú

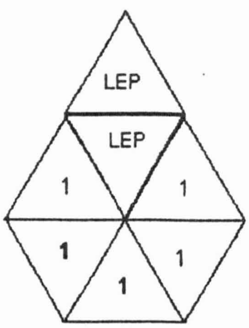
„tvár" hexaflexagónu. Číslice na prednej strane pásika sú vyznačené hrubšie pre lepšie pochopenie postupu naznačeného na ďalších obrázkoch. Trojuholníky s nápisom „LEP" sa na koci skladania potrú lepidlom a priložia k sebe. Ako postupovať pri skladaní tri-hexaflexagónu ukazujú obrázky 3 až 6. Matricu, ktorej predná strana smeruje nahor, prehneme najprv smerom dozadu za tretím trojuholníkom zľava (obr.3) a potom pravú časť pásika smerom dopredu za štvrtým trojuholníkom sprava (obr.4). Aby sme dostali útvar na obrázku 5, musíme časť pásika, ktorú sme pred chvíľou prehli dopredu, prekryť trojuholníkom s nápisom „LEP", ktorý sa nachádza pod ňou (resp. pod trojuholníkom označeným „2"). Teraz už stačí len spojiť lepom trojuholníky s nápisom „LEP", a máme pred sebou tri-hexaflexagón. Teda jednu z jeho tvárí (obr.6).



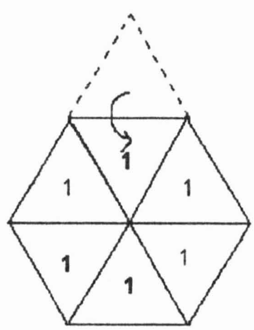
Obr. 3



Obr. 4

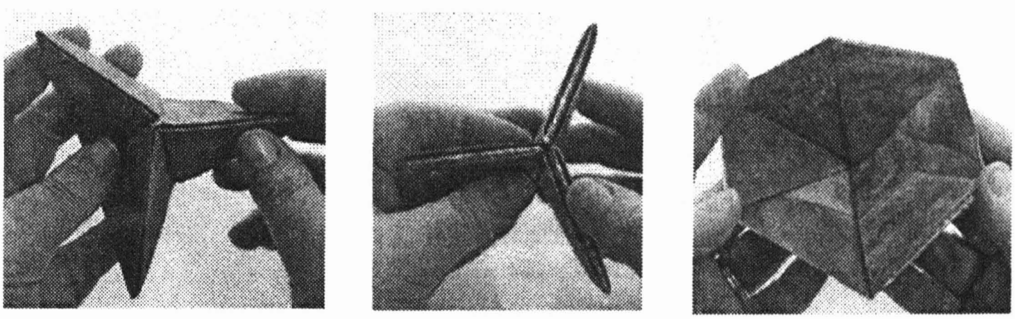


Obr. 5



Obr. 6

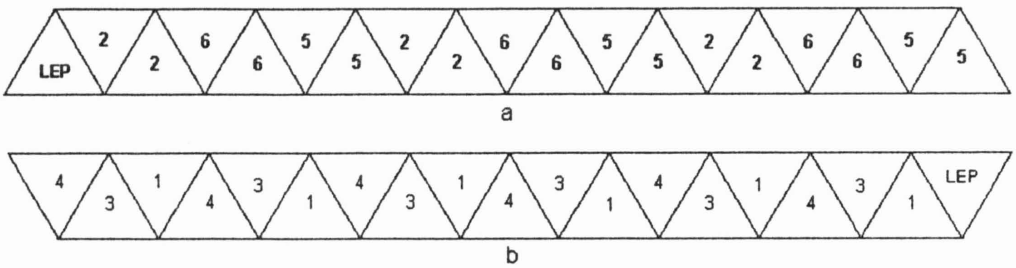
Ako nájdeme ostatné „tváre" tohto hexaflexagónu? No predsa flexovaním. Podobnú odpoveď ste asi predpokladali. Ale ako sa flexuje s takýmto flexagónom? To znázorňuje obr.7. Prehneme šesťuholník smerom dole pozdĺž jeho troch polovičných uhlopriečok, ako keby sme chceli priložiť k sebe každý druhý vrchol šesťuholníkovej „tváre“ (obr.7A). Dostaneme akúsi trojbokú „hviezdicu“ (obr.7B), z ktorej môžme odhaliť ďalšiu „tvár“ hexaflexagónu. Tam, kde bol stred predošlej šesťuholníkovej „tváre“, sú teraz vrcholy novej, ktoré stačí otvoriť smerom von. V prípade, že sa otvoriť nedajú, treba zložiť „hviezdicu“ z obrázka 7B prehnutím šesťuholníka smerom dole pozdĺž tých troch polovičných uhlopriečok, ktoré sme nepoužili (spojiť dole tie vrcholy šesťuholníka, ktoré boli v neúspešnom pokuse vrcholmi „hviezdice“). Sú len dve možnosti, ako zložiť „hviezdicu“ z obrázka 7B, ak jedna nevyhovuje, druhá bude.



A B C

Obr. 7: Flexovanie hexaflexagónom

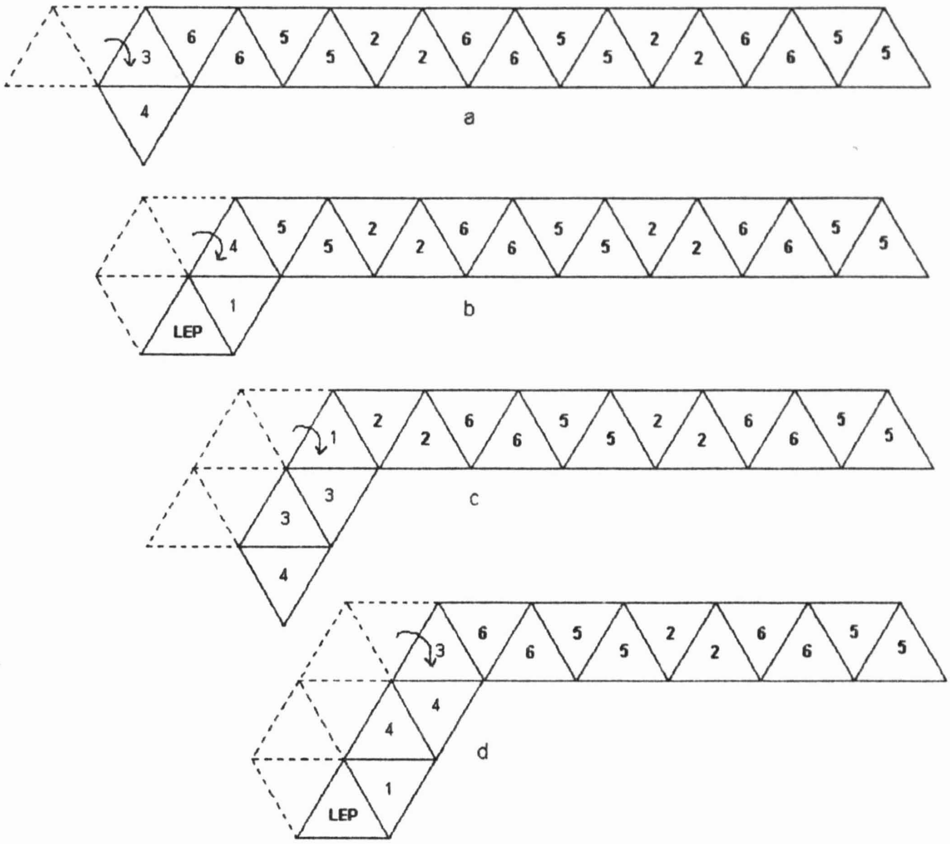
Teraz, keď už vieme, ako sa skladá tri-hexaflexagón, hexaflexagóny vyšších rádov nám už nebudú robiť problém. Budeme ich vždy „zjednodušovať“ na tri-hexaflexagón, ktorý vieme zložiť. Ukážeme si ako sa hexa-hexaflexagón zjednoduší na tri-hexaflexagón a tiež si povieme, ktoré hexaflexagóny budeme vedieť takýmto spôsobom skladať. Matricu už vyrobiť vieme, treba len zrátať, koľko trojuholníkov má obsahovať. Každá „tvár“ obsahuje 6 trojuholníkov a spolu máme 6 tvárí, teda $6 \times 6 = 36$, ešte $+2$ trojuholníky na zalepenie, to je 38. Ale pásik má trojuholníky na oboch stranách, teda to ešte vydelíme dvoma a dostaneme, že matrica hexa-hexaflexagóna musí obsahovať 19 trojuholníkov. Na lepšie popisovanie postupu, môžme jednotlivé trojuholníky očíslovať podľa obrázka 8 (a - predná strana (hrubšie vytlačené číslice), b - zadná strana).



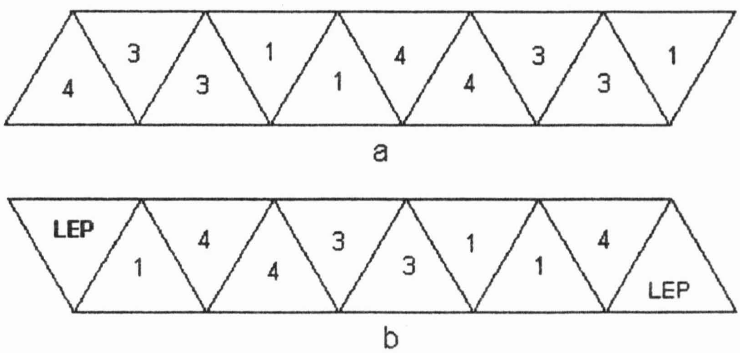
Obr. 8: Matrica hexa-hexaflexagónu

Ako zjednodušíme hexa-hexaflexagón na jednoduchší tri-hexaflexagón popisuje obrázok 9. Ak máme pred sebou matricu otočenú prednou stranou nahor, začneme ju ohýbať zľava smerom dopredu a to tak, že priložíme trojuholníky s rovnakými číslicami na seba, teda **2** na **2**, **6** na **6**, **5** na **5**, a zase **2** na **2** a tak ďalej, až kým nedostaneme zjednodušenú matricu pre tri-hexaflexagón znázornenú na obrázku 10 (a - predná strana, b - zadná strana). A z tej už známym postupom poskladáme hexaflexagón, ktorý bude mať 6 „tvárí". Tie odhalíme rovnako, ako v predchádzjúcom prípade, s tou výnimkou, že niektoré „tváre" hexa-hexaflexagóna sa dajú otvoriť dvoma spôsobmi (teda u niektorých „tvárí" nezáleží na tom, ktorou z dvoch možností vytvoríme vyššie spomínanú trojbokú „hviezdicu").

Podobným spôsobom, akým sme zjednodušili hexa-hexaflexagón na tri-hexaflexagón, sa dajú zjednodušiť aj niektoré hexaflexagóny vyšších rádov na iné, ktoré majú nižší rád, a tie na ďalšie, až kým sa nedostanú k hexa- a potom k tri-hexaflexagónu, ktorý už vieme zložiť. Otázka znie: Ktoré hexaflexagóny vieme takto zjednodušovať? Všimnime si, že v prípade hexa-hexaflexagónu sme počet trojuholníkov jeho matrice (bez tých s nápisom „LEP") zredukovali na polovicu tým, že sme ho „stočili". Rovnakým „stočením" by sme teda vedeli zredukovať na polovicu ľubo-



Obr. 9: Zjednodušenie hexa-hexaflexagónu na tri-hexaflexagón



Obr. 10: Zjednodušený hexa-hexaflexagónu

volne dlhý pásik trojuholníkov. Ale my potrebujeme na konci dostať počet trojuholníkov potrebný na zloženie tri-hexaflexagónu. Z toho teda vyplýva, že takto môžme redukovať len hexaflexagóny s počtom tvárí 3×2^n, kde $n \in \mathbb{N}$. Pri každom ďalšom redukovaní matrice s polovičným počtom trojuholníkov treba dať pozor, aby sme stále stáčali do toho istého smeru, aby nevznikla tzv. „harmonika", teda aby sa „stočený" pásik v mieste ohybu nedal otvárať do dvoch strán.

Prajem veľa úspechov pri skladaní hexaflexagónov a objavovaní ich „tvárí"! A tieto nemusia byť len očíslované, ale môžu skrývať rôzne obrazce, texty, príklady ... Skrátka, čokoľvek si len zmyslíte a vytvoríte.

Literatúra

[1] Gardner M., Flexagons, *Scientific American,* December, **195**(1956)

[2] Gardner M., *Mathematical puzzles and diversions*, ruský preklad, Mir, Moskva, 1971

[3] http://www.mootepoints.com/sleightbinding_gallery.htm, 2004

Mgr. Lenka Vojteková
doktorandka MFF UK
Sokolovská 83
186 00 Praha 8
e-mail: gazova@karlin.mff.cuni.cz