Milada Kočandrlová
O hyperbole

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 3, 151–157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150830

O HYPERBOLE

MILADA KOČANDRLOVÁ

Všude tam, kde se vzdálenost neměří přímo, např. při měření pomocí fázového rozdílu dvou vln, má význam hyperbola.

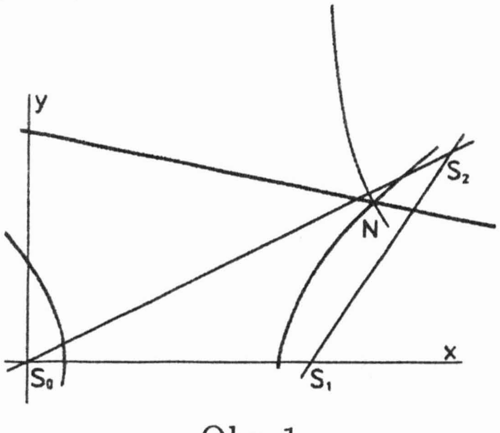
1. Zvukoměřická úloha

Úlohou zvukoměřictví se rozumí úloha určení polohy neznámého zvukového zdroje, jestliže byly zjištěny časové rozdíly t_1, t_2, $t_3, \ldots$, po kterých zvuková vlna ze zdroje N došla do naslouchacích stanic S_1, S_2, $S_3, \ldots$ později (nebo dříve) než do stanice S_0, viz [3].

Vezmeme-li např. dvojici $S_0 S_1$ naslouchacích stanic, pak geometrické místo bodů jejichž rozdíl vzdáleností od těchto dvou bodů je konstantní, je hyperbola. Analogicky pro dvojici S_1, S_2. Zdroj N je průsečíkem obou hyperbol.

Předpokládejme tedy tři stanice S_0, S_1, S_2. Kartézskou soustavu souřadnic zvolme tak, že počátek je v bodě S_0, na ose x leží bod $S_1[x_1; 0]$, bod $S_2[x_2; y_2]$ a $N[x; y]$, obr.1.

Čas, za který zvuk dojde ze zdroje N do stanice S_0 označme t, potom do S_i dojde za čas $t + t_i$, tj. o časový rozdíl t_i, $i = 1, 2$, dříve nebo později. Rychlost zvuku označíme v.



Obr. 1

Množina všech bodů N, které mají od bodů S_0, S_1 (ohniska) konstantní rozdíl vzdáleností vt_1, je hyperbola

$$\frac{\left(x-\frac{x_1}{2}\right)^2}{\frac{v^2{t_1}^2}{4}}-\frac{y^2}{\frac{{x_1}^2-v^2{t_1}^2}{4}}=1\,. \tag{1}$$

Hyperbola s ohnisky S_0, S_2, resp. S_1, S_2 je otočená vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic, proto by nebylo vhodné využívat jejich rovnice k nalezení bodu N.

Sférické vlnoplochy, které mají střed v bodě N a procházejí stanicemi S_0, S_1, S_2, mají vyjádření:

$$\begin{aligned} y^2+x^2&=v^2t^2,\\ y^2+(x_1-x)^2&=v^2(t+t_1)^2,\\ (y_2-y)^2+(x_2-x)^2&=v^2(t+t_2)^2\,. \end{aligned}$$

Odečtením první rovnice od zbývajících dvou rovnic dostaneme dvě lineární algebraické rovnice pro tři neznámé x, y, t

$$\begin{aligned} 2x_1x&=-2v^2t_1t-v^2{t_1}^2+{x_1}^2,\\ 2y_2y+2x_2x&=-2v^2t_2t-v^2{t_2}^2+{x_2}^2+{y_2}^2\,. \end{aligned}$$

Vyloučením t dostaneme rovnici přímky

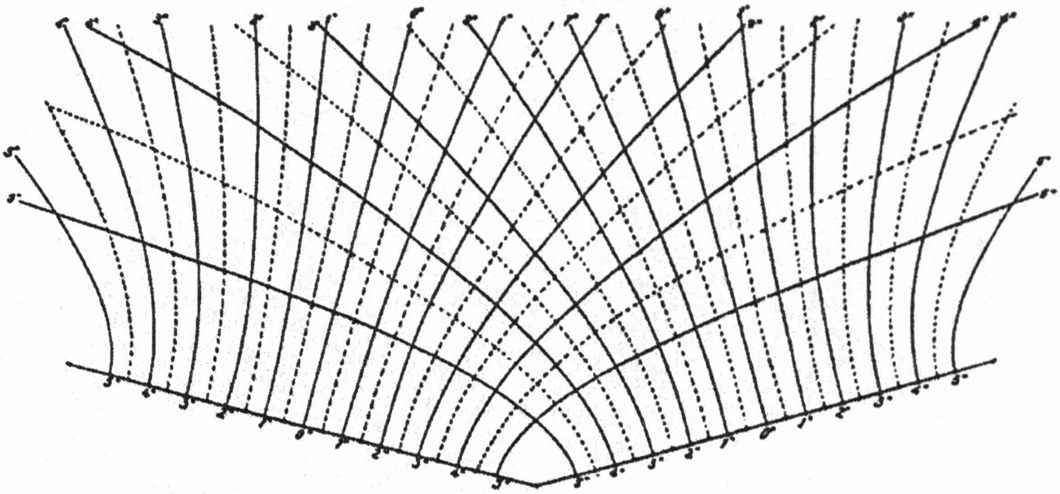
$$2(t_1x_2-t_2x_1)\,x+2t_1y_2\,y=v^2t_1t_2(t_1-t_2)+t_1(x_2^2+y_2^2)-t_2x_1^2.$$

Bod N je průsečíkem této přímky s hyperbolou (1), obr.1.

Je zřejmé, že zvukoměřická úloha je obrácenou úlohou k úloze GPS, viz [2].

2. Hyperbolické sítě

To bylo geometrické řešení zvukoměřické úlohy. V praxi se původně zvukový zdroj určoval pomocí hyperbolických sítí, obr.2. Konstrukce interpolačních hyperbol, které měly obecně malé hlavní osy, byla ale složitá.



Obr. 2

Rakouský generál Austerlitz v r. 1918 proto místo sítě hyperbolické navrhl sítě využívající následující tři vlastnosti tečen a asymptot hyperboly, viz [1].

1. Tečna t hyperboly v jejím bodě T prochází průsečíkem M její vedlejší osy s kružnicí k opsanou trojúhelníku F_1F_2T, kde F_1, F_2 jsou ohniska.

Tečna t půlí úhel α průvodičů F_1T a F_2T. Úhel α je obvodovým úhlem k tětivě F_1F_2, obr.3. Poloviční úhel $\frac{\alpha}{2}$ je obvodovým úhlem příslušným k tětivě MF_2. Kružnice k má střed $S[0, e\,\mathrm{cotg}\alpha]$, poloměr

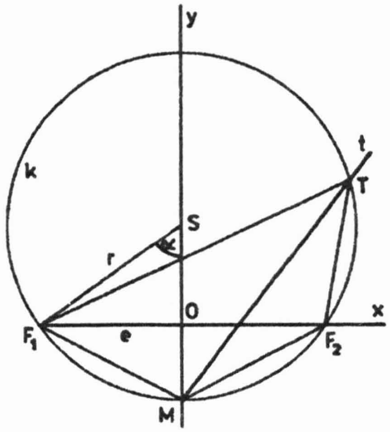
$$r = \frac{e}{\sin\alpha}.$$

Z trojúhelníka OF_1M dostáváme pro bod M $[0, -e\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha]$. Rovnice kružnice k je

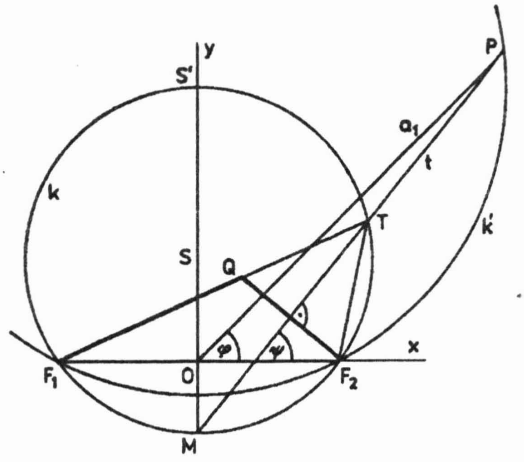
$$x^2 + y^2 - 2\,ey\,\mathrm{cotg}\alpha - e^2 = 0.$$

Je nazývaná kružnicí přesnosti úhlu α.

2. Průsečík P tečny t s asymptotou a_1 hyperboly leží na kružnici k' obvodových úhlů $\frac{1}{2}\alpha$ nad tětivou F_1F_2, tj. kružnici přesnosti úhlů $\frac{1}{2}\alpha$.



Obr. 3



Obr. 4

Je třeba ukázat, že bod $P[x,y]$ leží na kružnici k', která má rovnici $x^2+y^2-2ey\coth\frac{1}{2}\alpha-e^2=0$. Pomocí sinové věty v trojúhelníku F_1F_2Q, kde jsme označili ψ odchylku tečny a φ odchylku asymptoty od osy x (obr.4) dostaneme

$$\frac{|F_1Q|}{|F_1F_2|}=\frac{a}{e}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\psi)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})}=\frac{\cos\psi}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Sinovou větou v trojúhelníku OPM dostáváme

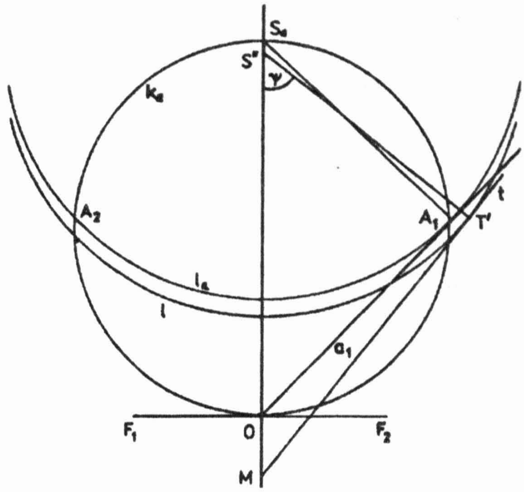
$$\frac{|OP|}{|MP|}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\psi)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)}=\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}=\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Rozepíšeme-li rovnost $|OP|=|MP|\cos\frac{\alpha}{2}$ do souřadnic, dostaneme rovnici kružnice k'. Její střed je $S'[0,e\coth\frac{\alpha}{2}]$ a poloměr $r'=e/\sin\frac{\alpha}{2}$.

3. Bod S'' vedlejší osy hyperboly takový, že $|MS''|=3|MF_1|$, je středem kružnice l, která se dotýká tečny t hyperboly. Její poloměr je $3a$.

V pravoúhlém trojúhelníku $MT'S''$ je (viz obr.5)

$$|T'S''|=|MS''|\cos\psi=3|MF_1|\cos\psi=3a$$

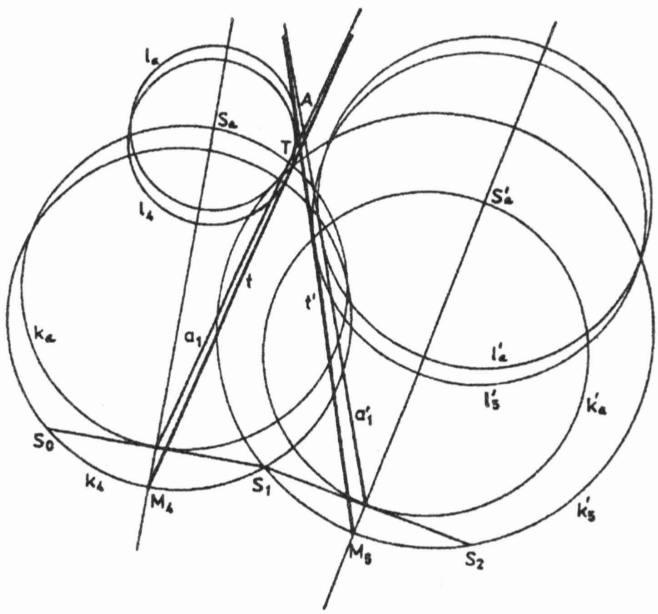


Obr. 5

Je-li $\alpha = 0$, tj. tečna je asymptotou a $M = O$, je pro střed S_a dotykové kružnice l_a, poloměru $3a$, $|S_aO| = 3e$. Kružnice k_a o průměru $|S_aO|$ se nazývá asymptotová, obr.5. Asymptoty procházejí průsečíky A_1, A_2 kružnic k_a a l_a.

Konstrukce a použití tangenciálního a asymptotového plánu

Při každé základně S_iS_{i+1} (tj. F_1F_2) jsou zakresleny svazky kružnic k_j přesnosti úhlů α_j a jejich průsečíky $M_1, M_2, M_3, \ldots$ s osou základny, kterými prochází tečna hyperboly, obr.6.



Obr. 6

Na plánu se nejdříve určí průsečík A asymptot hyperbol s ohnisky S_0, S_1 a S_1, S_2. Ten se potom zpřesní pomocí tečen těchto hyperbol.

Asymptota prochází bodem O_0 a průsečíkem kružnic k_a a $l_a = (S_a, 3a)$. Analogicky pro druhou hyperbolu. Průsečík asymptot a_1 a a'_1 je bod A.

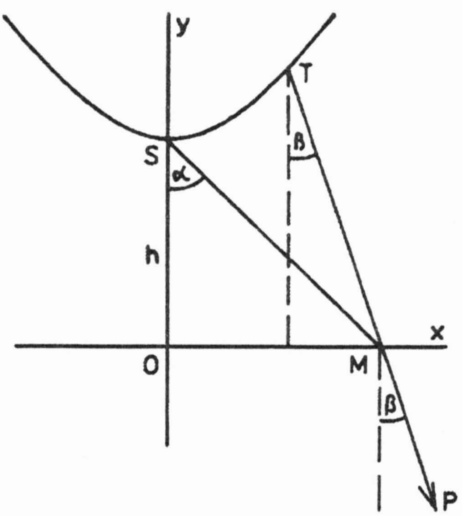
Bod A je blízko kružnice k_4 příslušné základně S_0S_1. Tečna z bodu M_4 se dotýká kružnice $l_4 = (S''_4, 3a)$. Analogicky pro druhou základnu. Průsečík tečen t a t' je bod T. Středy S_j lze volit dostatečně blízko sebe, potom chyba náhrady hyperbol jejich tečnami je malá.

3. Virtuální zdroje pro lom paprsků

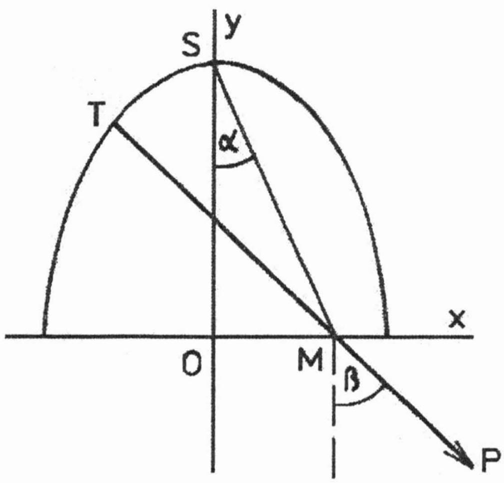
Z bodového zdroje S se světelný paprsek láme na rovinném rozhraní x do jiného prostředí. Prodloužíme-li lomený paprsek zpět do původního prostředí na délku původního paprsku, dostaneme bod T. Bod T je virtuálním zdrojem pro lomený paprsek.

Kolmici z bodu S na rozhraní x volme za osu y a její patu O za počátek soustavy souřadnic. Dále označme M bod lomu, $h = |SO|$ a α, β odchylky paprsků od normály rozhraní, obr.7a. Potom

$$|MT| = |MS| = \frac{h}{\cos\alpha}.$$



Obr. 7a



Obr. 7b

Pro souřadnice bodu T platí

$$x = |MS|\sin\alpha - |MT|\sin\beta = \frac{h}{\cos\alpha}(\sin\alpha - \sin\beta)$$

$$y = |MT|\cos\beta = \frac{h\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Vyloučením parametrů α a β s využitím zákona lomu

$$\sin\alpha = n\sin\beta$$

dostaneme rovnici

$$\frac{y^2}{h^2} - \frac{x^2}{h^2}\frac{n+1}{n-1} = 1$$

hyperboly pro lom k normále $n > 1$. Pro lom od normály $n < 1$ dostaneme rovnici

$$\frac{y^2}{h^2} + \frac{x^2}{h^2}\frac{n+1}{1-n} = 1$$

elipsy, obr. 7b. Elipsa i hyperbola mají obě společnou osu y a společný vrchol S. Pomocí těchto křivek lze ke každému paprsku SM určit paprsek lomený.

Literatura

[1] Gebauer, J., *Aplikovaná matematika pro vojsko*, Čs. vědecký ústav vojenský, Praha, 1927.

[2] Kočandrlová, M., O kružnici, *Učitel matematiky,* **12**(1) 2003, 10–16.

[3] Pírko, Z., Matematická teorie zvukoměřictví, *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky,* **66**(1937).

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta stavební ČVUT,
Thákurova 7
166 29 Praha 6
e-mail: Milada.Kocandrlova@fsv.cvut.cz