Milan Hejný; Marie Tichá

Matematické příběhy (9): Příběh devátý. Hádky řešené NIM-em

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 3, 143–150

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150829

MATEMATICKÉ PŘÍBĚHY[2] (9)

Příběh devátý

HÁDKY ŘEŠENÉ NIM–EM

Milan Hejný, Marie Tichá

Třídní učitelka se rozhodla Matěje s Filipem rozsadit, protože soustavně vyrušovali. Matěj půjde do první a Filip do poslední lavice.

„Rozsazení nepomůže. Budou si stále posílat dopisy a vyrušovat celou řadu. Lepší by bylo ... “ pokusila se navrhnout jiné řešení Jana.

„Netrapte se s tím,“ přerušila ji paní učitelka, která v sobě nezapřela češtinářku. „Dopisy půjdou, Jano, přes tebe, a já tě pověřuji, abys v nich opravila gramatické chyby. K adresátovi pustíš jen ten dopis, který bude úplně bez chyby, ostatní vrátíš pisateli. Platí?“

Třída se smála a Jana se v duchu zaradovala, že bude moci kluky trochu potrápit. Dopisy sice neposílala zpět k pisateli, ale opravovala je velmi pečlivě. Kluky její červené opravy pořádně zlobily. Schylovalo se k bouřce. Blesk uhodil po první korespondenci. V ní se hoši domluvili, že odpoledne půjdou společně na kluziště. Filip stanovil setkání na 15. hodinu před kluzištěm. Jana ale číslici „5“ pozměnila na „6“. Její záměr vyvolat nedorozumění se jí zdařil.

Několik minut před 15. hodinou byl Filip se dvěma páry bruslí na stadionu. Čekal zbytečně a v 15.40 rozzlobeně odešel. Přesně v 16 hodin se na stadion přiřítil Matěj. Také čekal zbytečně. Po půlhodině odešel s předsevzetím, že Filipa zmlátí. Druhý den se

---

[2] Článek byl napsán s podporou grantu GAČR 406/02/0829. Upraveno podle stejnojmenného příběhu knížky M. Hejný, Ľ. Niepel: Šestnásť matematických príbehov, SNP, Bratislava 1983.

chlapci pohádali. Když se ale podívali na lístek, který si posílali, pochopili příčinu nedorozumění. Zrada! Někdo přepsal původní číslici 5 na 6. Kdo jiný než Jana; „Je-li čeho moc, pak je toho příliš," pronesl Matěj oblíbenou větu svého budoucího švagra Petra. Osud Jany byl zpečetěný. Jak ji vytrestat, to kluci zatím nevěděli. Byli ale přesvědčeni, že se příležitost najde.

A našla se. Koncem února Jana onemocněla a nechodila do školy. Uzdravila se, když začínaly jarní prázdniny. Dříve, než odjela s rodiči k babičce, zatelefonovala Matějovi, aby jí řekl, co se ve škole probralo a co se mají naučit.

„Počkej Jano, hned si skočím pro sešity," přeochotně řekl Matěj, jehož duše volala po pomstě. Při literatuře mluvili o Erbenovi a jeho sbírce básní Kytici. Mají se naučit Kytici, řekne Janě, že dostali Polednici.

„Halo, Jano? Je to celkem dobré, většinou nám učitelé nedali nic, abychom si prý oddechli. Matikář řekl, že máme vyřešit 5 úloh podle vlastního výběru ze stran 62 a 63 a ujistil nás, že hned po prázdninách máme naději na písemku. Kovbojka se ale odehrála při češtině. Dožrali jsme třídní a ta nám napařila naučit se z Kytice první tři části Zlatého kolovratu, což představuje 27 slok, 5 veršů každá. Já se to snad nenaučím."

Tak, a bylo to. Když Matěj referoval Filipovi o akci, omlouval se, že byl k Janě tak krutý. Vždyť jí chtěl dát jen Polednici nebo ještě něco kratšího, ale najednou mu hlavou proletěla představa marného čekání na stadionu a tak ji to napařil.

„Patří jí to! Aspoň si uvědomí, jaké to má následky, když se do nás rýpe," ulehčil kamarádovu svědomí Filip.

Když podfuk vyšel po prázdninách najevo, ukázalo se, že pomsta byla skutečně hrozná. Jana se báseň učila tak intenzívně, že se rozhodla odejít z velmi pěkné oslavy narozenin svého bratrance dřív než ostatní a oželela dokonce i výlet na běžkách. Nyní se zase Jana cítila být velkou dlužnicí. Musí vymyslet, jak kluky potrestat.

Dlouho čekat nemusela. Příležitost jí nabídla písemka z matematiky. Tyto písemky bývaly zajímavé akce především kvůli hodnocení. Učitel často dával výjimečně úspěšným řešitelům kromě známky i zvláštní prémie. Když například nejslabší žák třídy napsal předvánoční písemku na dvě mínus, půjčil mu na celé prázdniny svoji sadu drátěných hlavolamů. Tentokrát pan učitel vypsal cenu pro nejúspěšnějšího řešitele předem; vlastnoručně upletenou pomlázku ze šesti prutů. Matěj prohlásil, že pomlázka bude na sto procent jeho. Jenže ve třídě je dobrých matematiků více – například Filip. Ale na něj Matěj tentokrát ani nepomyslel; chtěl soupeřit s Janou, která, když se do toho dá, je také velmi dobrá. A Jana se do toho opřela. Byla tiše, nevytrubovala své plány jako Matěj, ale o to lépe se na písemku připravila. Pomlázku získá ona a s její pomocí bude Matěje provokovat. Vydá mu ji, ale jen tehdy, když jí bude celý týden nosit tašku do školy i ze školy. A jestli se Matěj ozve jen slovíčkem, přibalí mu do tašky dvě cihly, tak. Pomsta byla na dosah ruky.

Písemka je napsaná, oznámkovaná! Pan učitel oznamuje úspěchy i neúspěchy žáků. Tento ceremoniál má už zaběhnutý průběh – začíná se od konce, nejprve přijdou na řadu nejslabší práce. Trochu smutku povzbuzení a rada, jak známku opravit. Potom lepší a ještě lepší práce a nakonec ty nejlepší. Všechna jména už padla, zbývala jen dvě: Jana a Matěj. Pan učitel se zatvářil slavnostně. „Až dosud se nám ještě nestalo, aby někdo zvládnul takovou náročnou písemku úplně bez chyby, na plný počet bodů. A tentokrát ji tak napsali dokonce dva. Vítězům blahopřeji! Velmi rád upletu pomlázky dvě.“

„To by nebylo spravedlivé,“ vyskočila Jana, která zisk pomlázky, pokud Matěj dostane tutéž, nepovažovala za vítězství. Vysvětlila své důvody a žádala další boj, dokud se jasně nerozhodne – buď jeden, nebo druhý.

„Souhlasím,“ hrdě řekl Matěj.

„Potom musím souhlasit i já,“ podrobil se pan učitel a navrhnul, jak určit vítěze. Psát další písemku by bylo otravné. Lepší bude, když si soupeři zahrají dvě matematické hry – dva různé NIM-y. Od každého sehrají dvě partie, první vždy začne Jana a druhou Matěj. Soupeři na tento návrh přistoupili. Pan učitel vysypal na stůl zápalky a vysvětlil jim pravidla her.

„Toto je první NIM; na hromádce je n zápalek. Hráči je střídavě odebírají. V každém tahu musí hráč odebrat aspoň jednu a nejvýš k zápalek. Vyhrává ten hráč, který odebere poslední zápalku. Čísla n a k si zvolíme, dejme tomu, takto; $n = 17$, $k = 3$.

Druhý NIM má stejná pravidla jako první, rozdíl je pouze v tom, že zvítězí ten hráč, kterému po rozebrání celé hromádky zůstane v ruce lichý počet zápalek. V této hře je číslo n vždy liché. Dáme si čísla $n = 11$ a $k = 4$. Tak, a můžete začít hrát."

Zde vyprávění ukončíme, abychom se mohli věnovat hře NIM. Konec příběhu si může čtenář dotvořit podle libosti.

Hra patří od nepaměti mezi oblíbené zábavy nejen dětí, ale i dospělých. Vítězství v některých hrách závisí pouze na štěstí (karetní, v kostky, ...), v jiných na důvtipu (šachy, mlýn, japonské go a podobně). Tyto druhé hry nazýváme matematické. Za druhé světové války, motivovaný vojenskými potřebami, je začal studovat americký vědec John von Neumann v souvislosti s konstruováním prvních počítacích strojů.

Dva základní pojmy teorie her jsou:
kritická pozice – taková pozice, ve které hráč, který je na tahu, prohraje (samozřejmě, pokud jeho soupeř hraje bezchybně),
strategie – návod na to, jak v každé nekritické pozici zahrát nejlepší tah.

Každá matematická hra, která má konečný počet pozic a pravidla nezávislá na náhodě, má strategii. Dokonce i šachy mají strategii, jenže lidé ji dosud neobjevili. Až ji objeví, bude možné vymyslet takový šachový stroj, nad kterým žádný šachista (ani ten nejgeniálnější) hrající černými figurami nebude moci vyhrát. Doufejme, že ta doba je ještě daleko.

Dnes už existují stroje, které umějí hrát šachy na velmi dobré úrovni. Je ale samozřejmé, že výzkum v tomto směru (oboru) má mnohem hlubší cíle, než je sestrojení šachového stroje. Přesto ale tvorba takového stroje je velmi pěkná a zajímavá úloha, na které se lidé učí řešit mnoho problémů kolem počítačů. Mezi konstruktéry šachových strojů patří mnoho šachistů, např. bývalý mistr světa Michal Botvinik.

Dodejme, že vymyslet stroj na kterýkoli z našich NIM-ů dnes už umí i student matematicko-fyzikální fakulty. Ale pro vás bude hledání strategie zatím ještě náročný úkol.

Úlohy

Úloha 1. Na hromádce je 17 zápalek. Můžete z ní najednou odebrat 1, 2 nebo 3 zápalky. Vyhrává ten, který bere poslední zápalku. Jak má zápalky odebírat první hráč, aby zvítězil? Zkuste totéž s 31 zápalkami.

Úloha 2. Na hromádce je 53 zápalek. Najednou můžete odebrat 1, 2, 3 nebo 4 zápalky. Jak má zápalky odebírat začínající hráč, aby vyhrál, tedy sebral poslední zápalku, bez ohledu na to, jak hraje druhý hráč?

Úloha 3. Zápalky jsou rozdělené do dvou hromádek. Na jedné je n zápalek, na druhé m zápalek ($m \neq n$). Jak má hrát první hráč, aby vždy vyhrál, tedy aby bral poslední zápalku? Je možné odebírat libovolný počet zápalek, ale vždy jen z jedné hromádky. Najděte řešení, které bude platit pro libovolná dvě čísla n a m.

Úloha 4. Při hře jste si zřejmě ověřili, že existují takové pozice rozdělení zápalek (které jsme již dříve nazvali kritické), při kterých ten, kdo právě táhne, musí nutně prohrát (pochopitelně, pokud soupeř zná systém hry). Uměli byste najít kritické pozice v následující hře?

Zápalky jsou rozdělené do dvou hromádek. Každý z hráčů odebírá 1, 2 nebo 3 zápalky a vyhrává ten, kdo odebere poslední.

Úloha 5. I v této hře najděte kritické pozice. Zápalky jsou rozdělené do dvou hromádek; je možné odebírat 1, 2 nebo 3 a vyhrává ten, kdo odebere poslední.

Úloha 6. Ve druhém NIM-u měli Jana a Matěj zadáno $n = 9$, $k = 3$. Partii začal Matěj tak, že vzal 1 zápalku. Věděli byste, jak má vypadat jeho druhý tah, aby vyhrál, tedy aby měl lichý počet zápalek, jestliže Jana vezme 1 zápalku? A co když Jana vezme 2 zápalky? A co když 3?

Úloha 7. Matěj s Janou opět hrají druhý NIM. Na hromádce je 11 zápalek, začíná Matěj a může brát 1, 2, 3 nebo 4 zápalky. Poraďte Janě, co má dělat, aby vyhrála při každém ze čtyř možných Matějových tahů.

***Úloha 8.** Zápalky jsou rozložené do 3 hromádek. V první je 5 zápalek, ve druhé 7 a ve třetí 9. Brát můžete libovolný počet, ale vždy jen z jedné hromádky. Vyhrává ten, kdo bere poslední zápalku. Uměli byste najít všechny kritické pozice?

****Úloha 9.** Zápalky máte rozložené do čtyř hromádek, na kterých je po řadě 1, 2, 5, 7 zápalek. Nyní budete hrát obrácený NIM, tedy ten kdo sebere poslední zápalku, prohrává. Můžete brát libovolný počet zápalek, ale vždy jen z jedné hromádky. Opět najděte všechny kritické pozice.

Řešení

Úloha 1. Každý z hráčů může odebírat 1, 2 nebo 3 zápalky. Při hledání nejvýhodnějšího postupu hry – strategie – je třeba postupovat od konce. Jestliže na hromádce zbude 1, 2 nebo 3 zápalky, vyhrává hráč, který je na tahu, protože může sebrat všechny zbývající zápalky, tedy i tu poslední. Když však zbudou 4 zápalky, hráč, který je na tahu, prohrává, protože soupeři musí nechat k sebrání 1, 2 nebo 3 zápalky. Další kritická pozice je 8 zápalek. Ať hráč, který je na tahu, odebere 1, 2 nebo 3 zápalky, soupeř vždy může pokračovat tak, že na hromádce zbudou 4 zápalky (což mu zajistí výhru). Další kritické pozice pro hráče, který je na tahu, jsou ty, kdy je na hromádce 12, 16, 20,... zápalek. Z toho vyplývá, že správná strategie začínajícího hráče je: na hromádce nechám takový počet zápalek, který je dělitelný čtyřmi.

Úloha 2. Stejně jako v předcházející úloze, zjistíte kritické pozice. Jsou to ty, při kterých je počet zápalek na hromádce dělitelný číslem 5. Začínající hráč by měl nejprve sebrat 3 zápalky, čímž dostane soupeře do kritické pozice, a potom stále udržuje na hromádce takový počet zápalek, který je dělitelný pěti.

Úloha 3. V této úloze je počet zápalek, které můžeme najednou sebrat, omezený pouze počtem zápalek na hromádce. Po delší hře jste si mohli všimnout, že kritické pozice jsou ty, kdy je na obou hromádkách stejný počet zápalek. Vítězící strategie začínajícího hráče tedy je: vždy vyrovnávat počty zápalek na obou hromádkách.

Úloha 4. Pozice je kritická právě když je na jedné hromádce n zápalek, na druhé m zápalek a platí: $m - n = 4k$. Tedy rozdíl počtů zápalek na obou hromádkách je dělitelný čtyřmi. Jestliže je například $m = 5$ a $n = 3$, bere první hráč 2 zápalky z pěti tak, aby na obou hromádkách zůstalo po třech zápalkách.

Úloha 5. Kritické pozice pro tuto úlohu jsou:

a) $(4j, 4i)$
b) $(1 + 4j, 2 + 4i)$
c) $(2 + 4j, 1 + 4i)$

kde i, j jsou libovolná přirozená čísla. Uvedené pozice dostanete z pozice (0,0), (1,2), (2,1) tak, že postupně vždy na jednu z hromádek přidáváte po 4 zápalkách.

Úloha 6. Přesto, že při lichém NIM-u se vítěz určuje jinak než v prvním NIM-u, je i tady strategie založená na kritických pozicích. Při hledání strategie je třeba v každém tahu rozlišit, zda má hráč v ruce sudý nebo lichý počet zápalek. Matějova strategie je:

a) bere-li Jana 1 zápalku, Matěj bere 3,
b) bere-li Jana 2 zápalky, Matěj bere 1,
c) bere-li Jana 3 zápalky, Matěj bere 1.

Úloha 7. Podobně se dá najít vítězná strategie pro Janu. Tady máte správné Janiny tahy pro některé pozice:

a) bere-li Matěj 1 zápalku, Jana bere 3,
b) bere-li Matěj 2 zápalky, Jana bere 3 nebo 4,
c) bere-li Matěj 3 zápalky, Jana bere 1,
d) bere-li Matěj 4 zápalky, Jana bere 1 nebo 2.

Úloha 8. Zápis (a, b, c) znamená pozici, ve které je na první hromádce a zápalek, na druhé b zápalek a na třetí c zápalek. Pořadí písmen není důležité, protože na pořadí hromádek nezáleží. Ze dvouhromádkového NIM-u víte, že všechny pozice typu $(a, a, 0)$ jsou kritické (a je libovolné přirozené číslo). Další kritické pozice jsou:

$(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$, $(3, 4, 7)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 5, 7)$, $(3, 5, 6)$, $(1, 6, 7)$.

Pozice $(5, 7, 9)$ není mezi kritickými. Proto začínající hráč vycházející z této pozice při správné hře zvítězí.

Úloha 9. I když se zdá, že tento NIM je jiný, většina jeho kritických

pozic se shoduje s kritickými pozicemi předcházející úlohy. Jsou to všechny pozice (a, a, b, b) s výjimkou pozice $(1,1,0,0)$. Dále jsou kritické tyto pozice:
$(0,1,2,3)$, $(0,2,5,7)$, $(1,2,4,7)$, $(1,3,5,7)$, $(0,1,4,5)$, $(0,3,4,7)$, $(1,2,5,6)$, $(1,1,1,0)$, $(0,2,4,6)$, $(0,3,5,6)$, $(1,3,4,6)$.
Jestliže druhý hráč tyto pozice ovládá, pak při správné hře vždy vyhrává.

Prof. Milan Hejný
KMDM UK, M. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: milan.hejny@pedf.cuni.cz

Mgr. Marie Tichá
MÚ AVČR, Žitná 25
115 67 Praha 1
e-mail: ticha@math.cas.cz