František Kuřina

Zobecnění Pythagorovy věty aneb Jak odborný učitel Max Hlouba vyřešil Fermatův problém

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 2, 65–73

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150818

ZOBECNĚNÍ PYTHAGOROVY VĚTY

aneb

Jak odborný učitel Max Hlouba vyřešil Fermatův problém

František Kuřina[1]

Vyučování matematice by nemělo být vázáno pouze na učivo předepsané osnovami, ale mělo by v rozumné míře rozvíjet i zájem nadaných žáků např. studiem otázek, které s probíraným učivem volně souvisejí.

Tak např. při probírání Pythagorovy věty se nabízí řada možností, jak tuto větu zobecnit. Všimněme si některých z nich.

Kladná čísla x, y, z, z nichž je z největší, jsou délkami stran pravoúhlého trojúhelníku, právě když platí *pythagorejská rovnost*

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

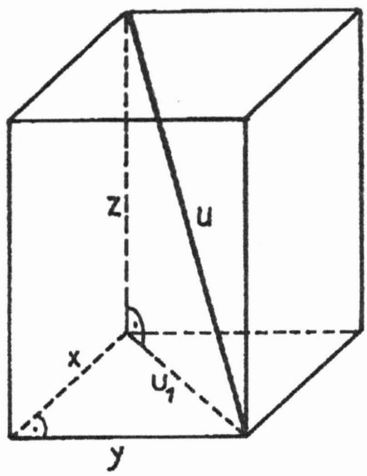
Jaký je geometrický význam rovnosti

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2, \tag{2}$$

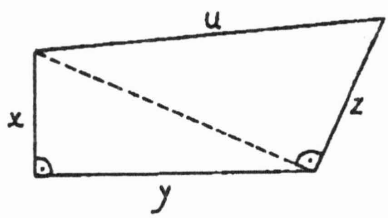
kde x, y, z, u jsou kladná čísla?

Již na základní škole jistě připomeneme, že geometrická interpretace rovnosti (2) spočívá „v dvojnásobné“ aplikaci Pythagorovy věty na výpočet délky tělesové úhlopříčky kvádru s rozměry x, y, z (obr. 1) nebo na délky stran čtyřúhelníku nakresleného na obr. 2.

[1]Příspěvek byl připraven s podporou grantu GAČR 406/02/0829



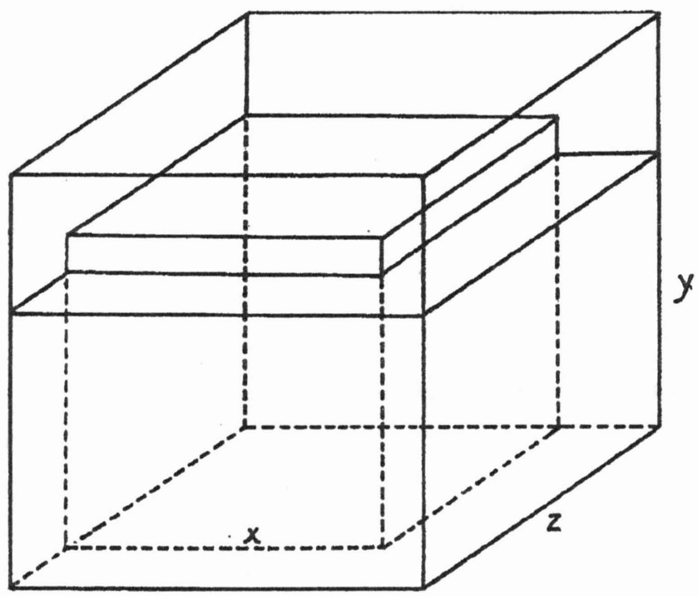
Obr. 1



Obr. 2

Platí-li rovnost (1), lze snadno nahlédnout podle obr. 3, že platí

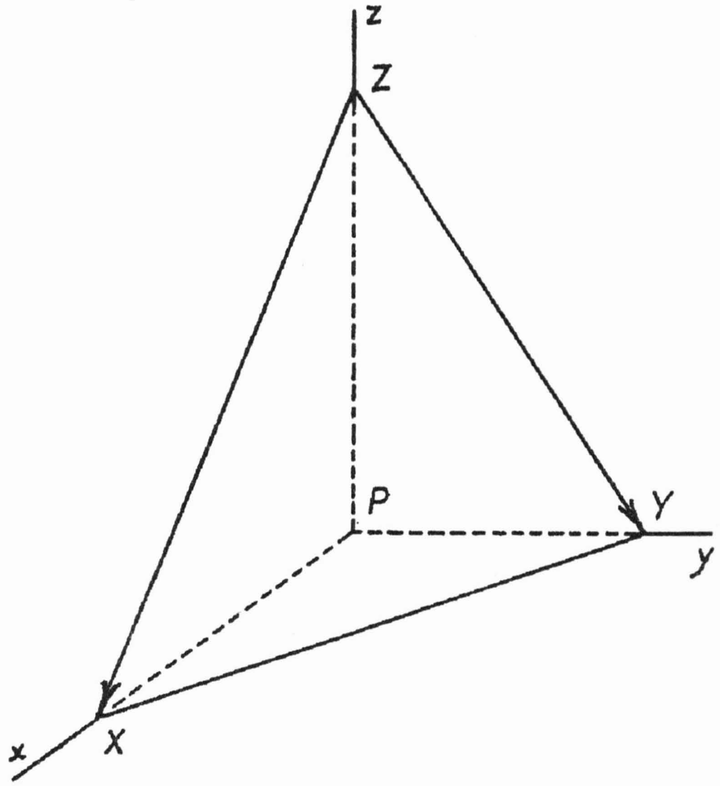
$$x^3 + y^3 > z^3. \tag{3}$$



Obr. 3

Na obr. 3 je nakreslena krychle o hraně délky z, s krychlí o hraně délky x a kolmým hranolem, jehož výška je y a obsah šestiúhelníkové podstavy $z^2 - x^2 = y^2$ (obrázek je kreslen za předpokladu, že $y < x$).

Překvapivé stereometrické zobecnění Pythagorovy věty pochází od německého matematika *Johanna Faulhabera* (1580 – 1635), kterého *John Conway* označuje v knize [2] za *„Velkého Aritmetika z Ulmu"*.



Obr. 4

Stereometrickou analogií pojmu trojúhelník je pojem čtyřstěnu, za stereometrickou analogii pravoúhlého trojúhelníku můžeme považovat trojboký jehlan, jehož boční stěny jsou pravoúhlé trojúhelníky s vrcholy pravých úhlů a hlavního vrcholu jehlanu.

Označíme-li A obsah trojúhelníku PXY (obr. 4), B obsah trojúhelníku PZY, C obsah trojúhelníku PXZ a D obsah trojúhelníku XYZ, zní Faulhaberovo zobecnění pythagorejské rovnosti (1):

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2. \tag{4}$$

Tuto rovnost lze snadno odvodit na základě stereometrických vztahů, na elegantní odvození pomocí vektorového součinu mne upozornil *Svatopluk Zachariáš*. Toto řešení zde stručně uvedeme. V souřadnicové soustavě podle obr. 4 označme:

$$X[x, 0, 0], Y[0, y, 0], Z[0, 0, z]. \tag{5}$$

Zřejmě platí

$$A = \frac{1}{2}xy, \ B = \frac{1}{2}yz, \ C = \frac{1}{2}zx.$$

Podle geometrického významu vektorového součinu platí pro vektory

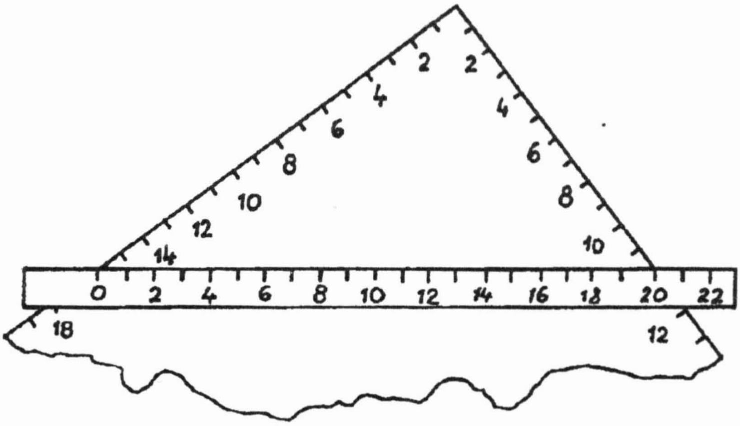
$$\overrightarrow{ZX} = (x, 0, -z), \overrightarrow{ZY} = (0, y, -z),$$
$$\overrightarrow{ZX} \times \overrightarrow{ZY} = (zy, xz, xy),$$
$$D^2 = \tfrac{1}{4}(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2).$$

Platí tedy rovnost (4).

Neobyčejně zajímavá je „diofantovská“ interpretace pythagorejské rovnosti:

Pro která přirozená x, y, z platí (1)?

Řadu řešení můžeme najít experimentálně podle obr. 5. Když sestrojíme papírový model pravého úhlu s vyznačením celočíselných bodů na jeho ramenech, můžeme vhodným pohybem odhadnout, a pak výpočtem prověřit, několik pythagorejských trojic (tj. trojic, které splňují rovnost (1)).



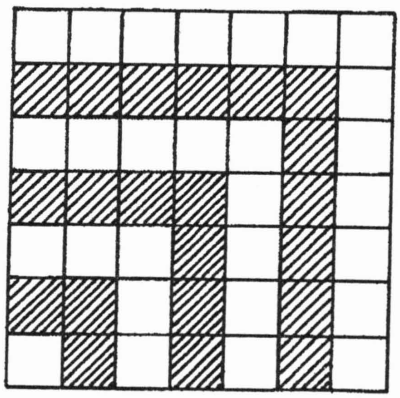
Obr. 5

Nekonečně mnoho takovýchto trojic získáme na základě rovnosti

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2, \tag{6}$$

Tato tématika byla, jak známo, studována již např. *Nicomachem z Gerasy* kolem 1. století našeho letopočtu. Z obr. 6 je zřejmé, že pro každé přirozené n platí

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1. \tag{7}$$



Obr. 6

Tato rovnost umožňuje najít nekonečně mnoho pythagorejských trojic: vedou k nim všechna lichá čísla větší než 1, která jsou druhými mocninami přirozených čísel:

$$9, 25, 49, \cdots$$

Tímto způsobem však všechny pythagorejské trojice nedostaneme. Dostaneme je však postupným výpočtem z algebraické identity

$$((a^2 + b^2) \cdot c)^2 = ((a^2 - b^2) \cdot c)^2 + (2abc)^2, \qquad (8)$$

kde a, b, c jsou přirozená čísla.

V roce 1908 vyhlásila Göttingenská akademie cenu 100 000 marek za důkaz tzv. *Fermatovy hypotézy*, že rovnice

$$x^n + y^n = z^n \qquad (9)$$

nemá v přirozených číslech x, y, z, n, $(n > 2)$ řešení.

Můžeme se divit, že při naznačených elementárních možnostech orientovat se v řešení diofantovské rovnice (1) se našla řada nadšenců, kteří se pokoušeli Fermatovu hypotézu dokázat?

Jednu lidskou tragédii s touto otázkou spjatou zpracoval literárně i náš spisovatel *Karel Matěj Čapek Chod* (1860 – 1927) v povídce otištěné v knize [3].

Protože je tato práce dnes málo známá, mne na ni upozornil nedávno zesnulý *Břetislav Novák*, přetiskujeme zde její část.

Věru, že nescházelo Hloubovi k vyvrcholení šťastné nálady než takové sluncem zlatě smavé ráno. Stalo se mu dnes, když se ještě před rozedněním probudil, že jej z lůžka takřka vymrštil nápad, náhle přišlá konkluse, která dlouholetou jeho matematickou práci, sestávající až dosud z marných pokusů, najisto přivede k dobrým koncům. Popadl tužku i zapsal si okamžitě rozbřesklou tu formulku, i počal potom sypati na papír řádek za řádkem se vzrůstajícím potěšením z bezpečí, že tentokráte, ano, že tentokráte už jistě se nemýlí! Najednou jako šlehnutím kouzleného proutku rozestoupl se před ním v žulové skále, o níž si matematikové celého světa až dosud nehty až do krvava obrousili, otvor, pravda, ještě těsný, pouhá ještě štěrbina, ale už zející, z níž vyláme si bezpečný vítězný vstup, odkud založí podkop, kterým vyhodí celou skálu do povětří a odstraní tak ze světa Fermatův problém, tento kámen, ležící na prsou matematiků všech národů a pásem.

On, Max Hlouba, prostý český odborný učitel v Neznašově! Jistě, tentokráte jistě! Ovšem že nelze ještě strhnouti z pravdy snad jedním hmatem nějaký takový tylový závoj, to ovšem ne. Naopak, těchto závojů je ještě spousta a největší potíž v tom záleží, že jsou všechny jednak tenké, že nelze ani dva sníti najednou a že bude tedy zapotřebí neúmorně trpělivé práce, než se přijde na poslední.

Ale už ta pouhá jistota o neklamnosti nalezené methody, ta šťastná vítězná jistota, její poznání stálo za to, naroditi se a dožíti se takového jitra jako dnes, kdy člověk může jenom jediného litovati, že totiž jeho náruč nemá takové rozpětí, aby objal celý svět! Je to vůbec možno, aby svět byl tak krásný?! Jistě, že táž intuice, která dnes sňala s očí jeho duše matematické bělmo, protřela i jeho tělesné smysly, aby právě dnes z nenadání uzřel všechnu tu malebnou útěšnost svého rodného Neznašova, měkkou spanilost blankytu hor. A jak je to úžasné, ani slavičí rokot nikdy nedojal jeho srdce tak, jako teď prostičká píseň maličké saranče „marši obecné“ Tettix subulatus (Hloubův odbor byly přírodní vědy) úryvkovitě jako na stříbrné drátky drnkaná v prohřátém trsu trávy tady na tři metry před Hloubou. A Hlouba se měl co držeti, aby nezajásal nad pouhým faktem, že okénko, jehož jasně mihotavá jiskérka slunečným reflexem až sem šlehá, vězí v domku horských samot, odtud aspoň na 14 km vzdušné čáry dalekých!

...

Obědval s tužkou a papírem a vůbec každou prázdnou chvilku obětoval svému démonu Fermatovi, k vůli němu začal on, jindy tak vzorný učitel, i školu zanedbávati, i v noci vstával, rozsvěcel a psal, psal až do rána, kdy jej žena našla u psacího stolu, an spí, čelo složeno na rukou.

Problém však nedokázal dořešit. Přišla válka a mobilizace.

... neminulo dne, aniž by byl došel od něho polní poštou dopis, ale jeden jako druhý pokryt byl matematickými formulkami, psanými inkoustovou tužkou a někdy algebru vystřídaly ohromné kolony číslic, sotvaže pisateli zbylo místo na srdečný pozdrav a na sdělení, že „je vše při starém“, ale jaké to „staré“ jest, nikdy se Štefka - jeho žena - nedověděla.

Toliko když svému choti sdělovala, že „dá-li pán bůh, najdeš nás, drahý tatíčku, aspoň o jednoho zase víc, až se vrátíš, kéž bys se vrátil dřív!" došlo k této záležitosti asi pět vřelých řádek a dokladem jich nelíčené vřelosti byla velká jakás krůpěj, v níž se závěrek písma v modravou směs rozpustil právě tam, kde mluvil o 100.000 marek a bohudík nezvratně již k brzkému šťastnému cíli blížící se cestě.

Potom zase spousta lístků se spoustami číslic, z nichž některé mnohokráte podškrtnuty, příkazy o pečlivém jich ukládání, až konečně lístky umlkly, dvanáct neděl tomu, krátce před tím, než poprvé zaplakal třetí dědic jména Hloubova a jeho choť nevěděla do dneška, nechová-li pohrobka.

Uleknuta pohlédla paní Hloubová před se. Stál tu, jakoby ze země vyrostl, posel z radnice a jeho vzezření Štefčinu duši ze zasněné dálky vrátilo do přítomnosti, z hlucha a tupa na ráz vybouřené. Byl to šetrný sdělovatel truchlivých zpráv, a když odešel, nebylo dalších pochyb, potvrzení pravdy držela černé na bílém v rukou. Nescházela na potvrzení ani nejautentičtější pečeť, kteráž slepila šest posledních polních lístků dohromady; byly vdově doručeny s některými drobnostmi po padlém. Lístky měl v náprsní kapse, když přiletěla nepřátelská kule do srdce.

Ani slůvko ani číslici na lístcích nebylo lze přečísti, luštiti, kromě nadpisu všem společného: Závěrečné provedení důkazu o neudržitelnosti Fermatova problému.

Ale provedení samo utonulo ve smíšenině modře a červeně nadobro a beznadějně. Dlouho seděla paní Štefa Hloubová nad tímto posledním poselstvím svého chotě, než se spustil s očí jejích horký ručej, jímž vyplakala všechny slzy, půlleta zdržované. Nevyplakala je najednou, ani za den, ani za týden, ale stalo se přece, že jich bylo stále méně a že už nebyly tak horké, ale úlevy nepocítila. Jednou, už v zimě, vyklízejíc psací stůl svého v pánu zesnulého, vysypala všechny jeho lístky s nedokončeným důkazem o Fermatově problému ze zásuvky, kamž je ukládala až do jeho, nyní již marného, návratu.

Náhle vjely její prsty zimničně do té hromádky a když vylovily z ní lístky s dokumenty slz a krve Maxovy, položila je stranou.

Ostatní schvátila energickým hmatem a vhodila je do kamen. Už hořely plamenem, když vztáhla ještě ruce, jakoby je chtěla zachrániti. Ale bylo už pozdě.

„A kdyby také ... Ani za sto tisíc!“ zašeptaly její rty.

Teprve když poslední se plameni rozpadl, klesla paní Štefa na kolena a přitiskla své rty poprvé na rudou stopu poslední, kterou Max Hlouba na tomto světě po sobě zanechal.

O problematice *Fermatovy hypotézy*, kterou dokázal r. 1993 anglický matematik *Andrew Wiles*, byla u nás publikována řada prací. Připomeňme zde pouze populárně psanou knihu *Simona Singha* [4] a sborník přednášek přednesených na semináři ke 400. výročí narození *Pierre de Fermata*, který se konal v roce 2001 v Praze [5].

Literatura

[1] Fraedrich, A., M., *Die Satzgruppe des Pythagoras, B. I.*, Mannheim, 1994.

[2] Conway, J., H., Guy, R., K., *The Book of Numbers*, Copernikus, Springer, New York, 1996.

[3] Čapek - Chod, K., M., $x^n + y^n = z^n$, In Ad hoc. Pražská akciová tiskárna. Praha, 1919.

[4] Singh, S., *Velká Fermatova věta*, Academia, Praha, 2000.

[5] *Matematik Piere de Fermat*, Cahiers du CEFRES, No. 28, Praha, 2002.

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové
Víta Nejedlého 573, 500 03 Hradec Králové 3
e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz