

Učitel matematiky

Lenka Vojteková
Flexagóny Martina Gardnera

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 1, 39–45

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150814>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2004

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

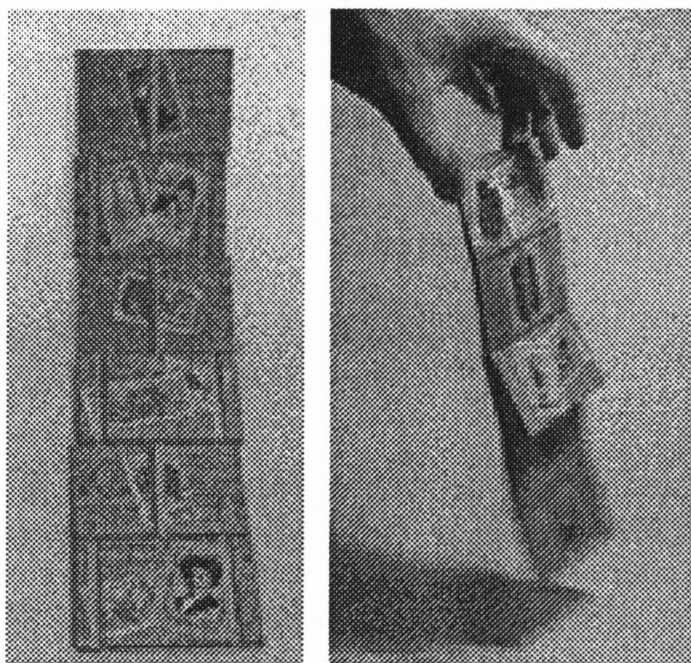


This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

FLEXAGÓNY MARTINA GARDNERA

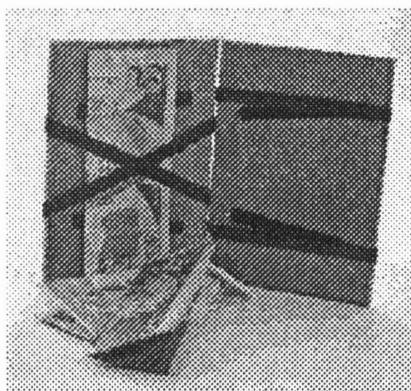
LENKA VOJTEKOVÁ

Čo to je „TETRAFLEXAGÓN“? Pod pojmom flexagón (flex znamená v angličtine ohýbať) si môžeme predstaviť útvar z papiera, ktorý má mnoho „tvári“. Tieto možno pomocou ohýbania objaviť alebo ukryť. Ak sú navyše ešte aj zaujímavo dekorované, máme krajší estetický zážitok a môžeme lepšie vidieť, ako sa menia. Existuje niekoľko druhov flexagónov. Keďže tetra znamená v latinčine štyri, tetraflexagón je flexagón so štyrmi stranami.



Obrázek 1

Mohli by sme sa domnievať, že tak jednoduchá vec, ako prvý flexagón, bola objavená pred mnohými rokmi. Našli sa písomné



Obrázek 2



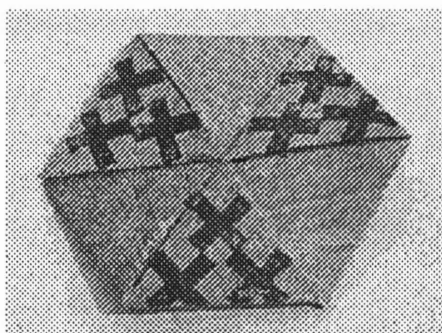
Obrázek 3

zmienky o tom, že takýto vynález (zariadenie) sa objavil na základných školách v predvojnovnej Viedni. Dokonca v minulých storočiach sa nielen deti hrávali s flexagónmi, bez toho, že by ich tak niekto nazval. Hračka dnes známa ako „Klik-klak Block“ alebo „Flip-flop Block“ (obr. 1), zložená z niekoľkých drevených alebo plastových plátok spojených skríženými pásikmi, funguje na princípe ohýbania flexagónových „pántov“. Ak uchopíme koncový plátek a spustíme zvisle dole, vyvoláme efekt dole sa valiacich (preklápajúcich) plátok. S tetraflexagónmi sa môžeme stretnúť aj v bežnom živote. Na trhu sa objavili „flexagónové“ peňaženky (obr. 2), alebo tiež pohľadnice (obr. 3).

Flexagóny, presnejšie hexaflexagóny (šesť-stranové flexagóny, obr.4), boli objavené na Princeton University v roku 1939. Angličan Arthur H. Stone, postgraduálny študent tejto univerzity, sa vyžíval v čmáraní a rôznom skladaní pásikov papiera odstrihnutých z okrajov papierov v jeho bloku, pretože americký papier bol príliš veľký do jeho anglického zakladača. Takže si krátil dlhú chvíľu rôznym hraním sa s týmito pásikmi. Jedna z jeho konštrukcií, vzniknutých vďaka tejto šťastne nešťastnej náhode, upútala jeho pozornosť. Onedlho sa sformovala skupina postgraduálnych študentov, kde samozrejme Stone nemohol chýbať, aby objasnila tajomstvo „flexible hexagon“, pre ktorý sa neskôr začal používať termín „flexagon“, alebo „hexaflexagon“. Stoneovi spoločníci (Richard P. Feynman, Bryant Tuckerman, John W. Tukey) objavili ešte ďalšie druhy flexagónov po tom, ako im Stone ukázal svoj objav. Okolo spomínaných hexaflexagónov sa vybudovala kompletná matematická teória.

Omnoho menej sa vie o tetraflexagónoch. Stone a jeho priatelia, najmä John W. Tukey, venovali nemálo času skladaniu a analýze týchto štvorstranných foriem, ale nepodarilo sa im vypracovať vyčerpávajúcu teóriu schopnú zahrnúť všetky ich nesúhlasné variácie. Napriek tomu niekoľko druhov tetraflexagónov môžeme nájsť v rekreačnej matematike.

O sedemnást rokov neskôr, v roku 1956, sa objavili flexagóny v Scientific American v článku Martina Gardnera. Flexagóny na-

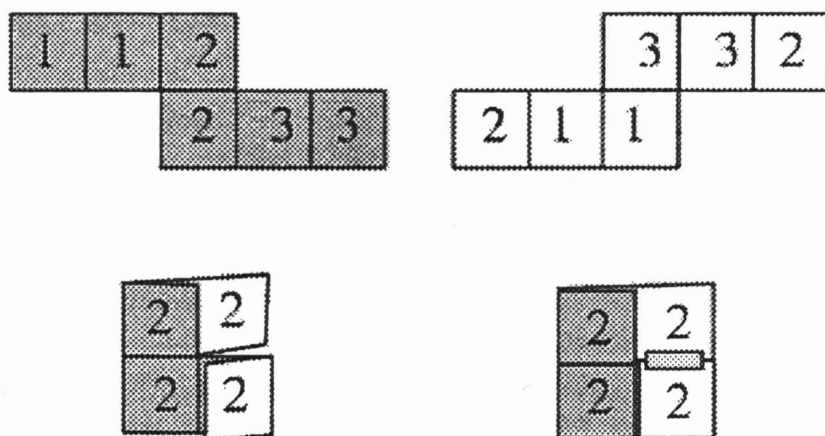


Obrázek 4

štartovali kariéru Martina Gardnera v oblasti rekreačnej matematiky. Počas dvadsiatich piatich rokov písal stĺpček „Matematické hry“ v Scientific American a napísal viac ako 40 kníh venujúcich sa rôznym problémom a zaujímavostiam práve z tejto oblasti. Tetraflexagóny môžeme objaviť napríklad v jeho knihe The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.

Čo potrebujeme na výrobu tetraflexagónov? V prvom rade papier, nie príliš tenký, aby sa netrhal, ale tiež nie tvrdý, ten by sa zle ohýbal. Ďalej nožnice, pravítko, ceruzku alebo farbičky a lep, alebo lepiacu pásku.

Ako prvý si ukážeme najjednoduchší tetraflexagón s tromi tvármi, ktorý Gardner nazýva tri-tetraflexagón. Na obrázku 5 je zachytené, ako sa dá tento útvar zhotoviť pomocou ohýbania pá-



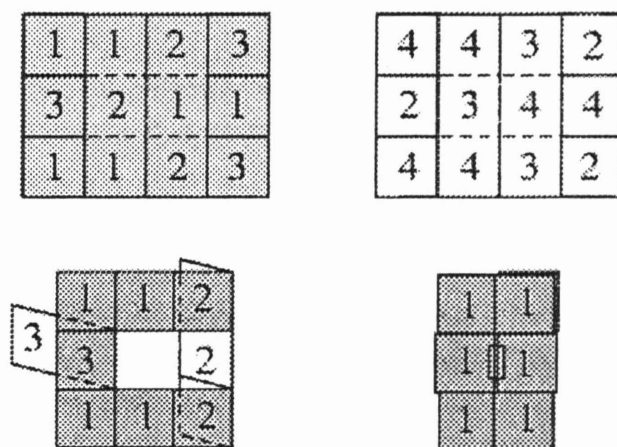
Obrázek 5

sika papiera (5a zobrazuje prednú, 5b zadnú stranu pásika). Čísla v štvorčekoch určujú, ktoré políčka sa budú spolu nachádzať na danej „tvári“ flexagónu. Obrázok 5c znázorňuje, ako a v ktorých miestach treba prehnúť pásik papiera: smerom dozadu v ohybe medzi štvorčekmi „1“ a „2“ na prednej strane pásika, a smerom dopredu v ohybe medzi štvorčekmi „3“ a „3“ tiež na prednej strane pásika. 5d ukazuje miesto spojenia dvoch okrajov lepiacou páskou.

Ako nájdeme ďalšie „tváre“ tohto flexagónu? „Tvár“ 2 je teraz navrchu, „tvár“ 1 je naspodu, a „tvár“ 3 nájdeme, keď preh-

neme flexagón smerom dozadu podľa zvislej osi „tváre“ 2 tak, že sa protiľahlé bočné okraje spoja. „Tvár“ 2 teraz tvorí vonkajšok a „tvár“ 3 vnútrajšok zohnutého flexagónu. Teda stačí „otvoriť“ flexagón. „Tvár“ 2 sa dostane na spodnú stranu flexagónu, „tvár“ 3 na vrchnú a „tvár 1“ je ukrytá vo vnútri flexagónu.

Prejdime teraz k troška zložitejším útvarom, tetra-tetraflexagónom, ktoré majú 4 „tváre“. Najjednoduchšie je začať s obdĺžnikovým kusom papiera rozdeleným na $3 \times 4 = 12$ štvorčekov. Obrázok 6a znázorňuje prednú a obrázok 6b zadnú stranu papiera. Prerušovaná čiara ukazuje, kde treba strihať, aby sme dostali „otvorené okno“, teda z troch strán vystrihnutý obdĺžnik. Tento obdĺžnik potom ohneme smerom dozadu a takisto dozadu ohneme aj krajný pravý stĺpec (obr.6c).



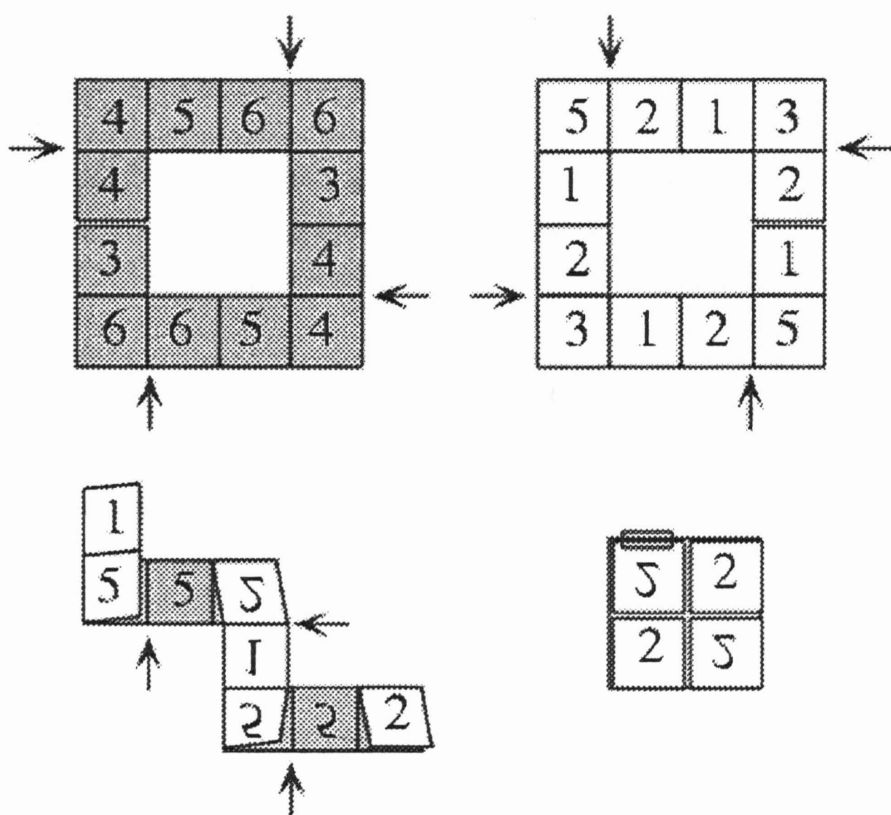
Obrázok 6

Teraz už stačí len ešte raz zohnúť smerom dozadu pravý stĺpec, zvyšný štvorček z vystrihnutého obdĺžnika smerom dopredu a lepiacou páskou spojiť okraje štvorčekov, ako ukazuje obrázok 6d. „Tváre“ 1, 2 a 3 by ste mali nájsť ľahko, hľadanie „tváre“ 4 vám potrvá o máličko dlhšie, no nájsť ju, by nemalo byť problémom. Je samozrejmé, že pri tom nesmiete roztrhnúť žiadnu časť flexagónu.

Pre podobné tetraflexagóny vyšších rádov by sme mohli formulovať pravidlo, že ak majú párny počet „tvári“, dajú sa zostrojiť

z podobnej obdĺžnikovej matrice ako tetra-tetraflexagón. Na výrobu tetraflexagónov s nepárnym počtom „tvári“ môžeme použiť maticu analogickú tej, ktorú sme použili pre tri-flexagón. Avšak, aj keď sú dva rady malých štvorcekov postačujúce na výrobu tetraflexagónov tohto typu, pre lepšiu manipuláciu s maticou môžeme namiesto do dvoch zoradiť štvorceky do viacerých vodorovných radov.

Teraz si ukážeme odlišný typ tetraflexagónov, ktoré majú nezvyčajnú vlastnosť. Dajú sa ohýbať okolo dvoch kolmých osí. Ako zostrojíme takýto hexa-tetraflexagón, ukazuje obrázok 7.



Obrázek 7

Začneme s maticou štvorcového typu. Na obrázku 7a je zachytená jej predná a na 7b zadná časť. Pozohýbaním matrice pozdĺž čiar smerom dopredu, ako naznačujú šípky na obrázku 7a, dostanete situáciu zobrazenú na 7c. Ohýbajte vzniknutý útvar podľa

šípky na obrázku 7c nasledovne: podľa ľavej zvislej šípky dopredu, podľa pravej zvislej šípky tiež dopredu a podľa vodorovnej šípky dozadu. Teraz už stačí prekryť ľavý horný koniec štvorčekom s dvojkou a dostaneme situáciu na obrázku 7d - na prednej strane sú štyri dvojky a na spodnej štyri jednotky. Podľa obrázka zlepíme okraje štvorčekov „2“ a „1“ lepiacou páskou.

Práve vyrobený hexa-tetraflexagón môžeme ohýbať podľa oboch osí, vertikálnej aj horizontálnej, aby sme odkryli všetky jeho „tváre“ Väčšie matrice štvorcového typu (ako pri tomto dvojosom hexa-tetraflexagóne) môžu byť základom pre zhotovenie podobných tetraflexagónov s počtom „tvári“ zvyšujúcim sa o štyri, teda: 4, 10, 14, 18, 22, ...

A čo dodať na záver? Po tom, ako boli flexagóny objavené a zverejnené, stali sa inšpiráciou pre mnohé články a knihy. Gardnerov článok vyvolal pobláznenie u veľkej časti populácie. Flexagóny boli tlačené ako pohľadnice a rôzne reklamné letáčky. Po Gardnerovom článku sa akoby roztrhlo vreco s listami od čitateľov Scientific American. V jednom z nich sa píše:

*„Vážená redakcia,
celkom ma zaujal článok nazvaný „Flexagóny“ uverejnený vo Vašom decembrovom vydaní. Trvalo nám len šesť až sedem hodín zlepíť hexahexafluxagón do správnej konfigurácie. Odvtedy bol pre mňa zdrojom neustáleho údivu. Ale nastal problém. Dnes ráno sa jeden náš spolužiak len tak mimovoľne hral s týmto hexahexafluxagónom, a cíp jeho kravaty sa zachytil do jedného zo záhybov hexahexafluxagónu. Pri každom ďalšom ohybe stále väčšia časť jeho kravaty mizla vo flexagóne. Až konečne po šiestom ohybe zmizla úplne. Začali sme bláznivo „flexovať“, no nenašli sme ani stopu z kamarátovej kravaty. Zato sme objavili šestnásť konfigurácií tohto hexahexafluxagónu.....“*

Mgr. Lenka Vojteková
doktorandka MFF UK
Sokolovská 83
186 00 Praha 8
e-mail: gazova@karlin.mff.cuni.cz