Učitel matematiky

Milada Kočandrlová

O kružnici

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 1, 10–16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150811

O KRUŽNICI

MILADA KOČANDRLOVÁ

Kružnicový oblouk, případně celá kružnice, je častým geometrickým prvkem v mnoha technických oborech. Rotace, jejímiž trajektoriemi jsou právě kružnice, patří k základním fyzikálním pohybům. Obloukem kružnice jsou nahrazovány oblouky složitějších křivek, žádná z dopravních komunikací se bez tohoto oblouku neobejde.

1. Kružnicové oblouky na dopravních komunikacích

Je zřejmé, že k realizaci dopravních oblouků by bylo problematické chtít sestrojit odpovídající kružítko. Proto je třeba ze známých vlastností kružnice odvodit metody pro konstrukci bodů navržených oblouků.

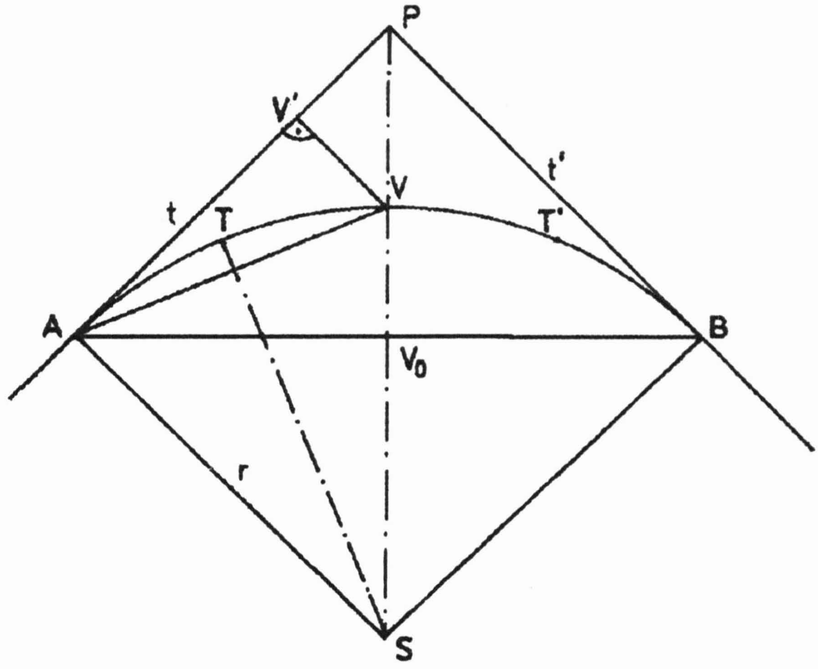
Obvykle jsou dány dvě přímé tratě t a t' a poloměr r kružnicového oblouku. Nejdříve je třeba určit body A a B dotyku tečen s obloukem, tzv. hlavní body. Z pravoúhlého trojúhelníku APS (středový úhel α se vypočítá z odchylky daných tečen) je (obr. 1),

$$|AP| = |PB| = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Nad tětivou AB lze určit vrchol V oblouku

$$|VV_0| = |VS| - |V_0S| = r(1 - \cos \frac{\alpha}{2}).$$

Analogicky můžeme určit tzv. čtvrtobloukové body T a T' nad tětivami AV a VB. Takovéto postupné určování bodů se nazývá vytyčování od tětivy viz [2].



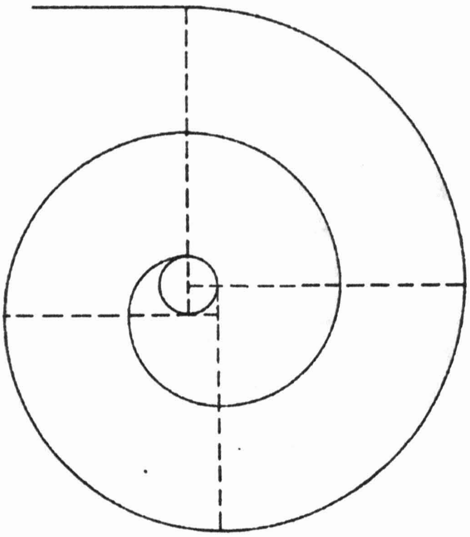
Obr. 1

Je-li tětiva AB příliš veliká, lze body oblouku určovat (vytyčovat) od tečny, např. AP. Nejdříve se na tečně určí bod V' a potom na kolmici k tečně bod V, obr. 1. Úhel PAV je úsekovým úhlem ke středovému úhlu ASV, tj. $|\sphericalangle PAV| = \frac{\alpha}{4} = |\sphericalangle VAV_0|$, proto $|VV'| = |VV_0|$ a

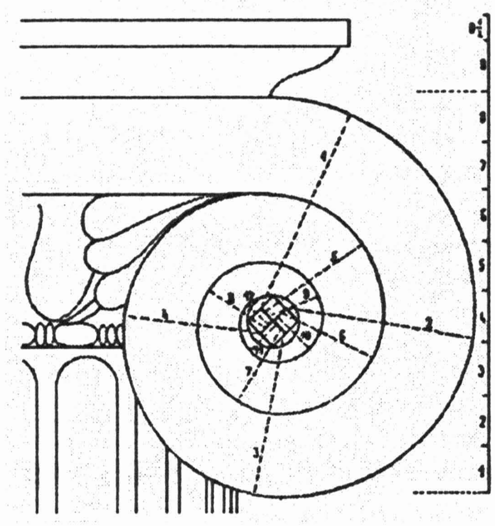
$$|AV'| = |AV_0| = r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

2. Konstrukce voluty iónské hlavice podle Vitruvia

Pomocí kružnicových oblouků byly rekonstruovány např. voluty hlavic iónských sloupů. Podle neúplného Vitruviova návodu v publikaci [3] se výška voluty pod vodorovnou deskou (abakem) rozdělí od shora na 4, 1 a 3 stejné dílky. Druhý dílek je průměrem $2r$ volutového oka (oculus). Dále Vitruvius hovoří o konstrukci čtyř závitů voluty z čtvrtkružnicových oblouků. První oblouk má střed totožný se středem oka a poloměr $4{,}5\,r$. Každý další čtvrtoblouk má mít poloměr menší o r. Pak druhý oblouk má poloměr $4\,r$ a výška voluty je $8{,}5\,r$ a ne $8\,r$. Dále pak voluta nebude mít závity čtyři, ale pouze tři, včetně volutového oka (obr. 2).

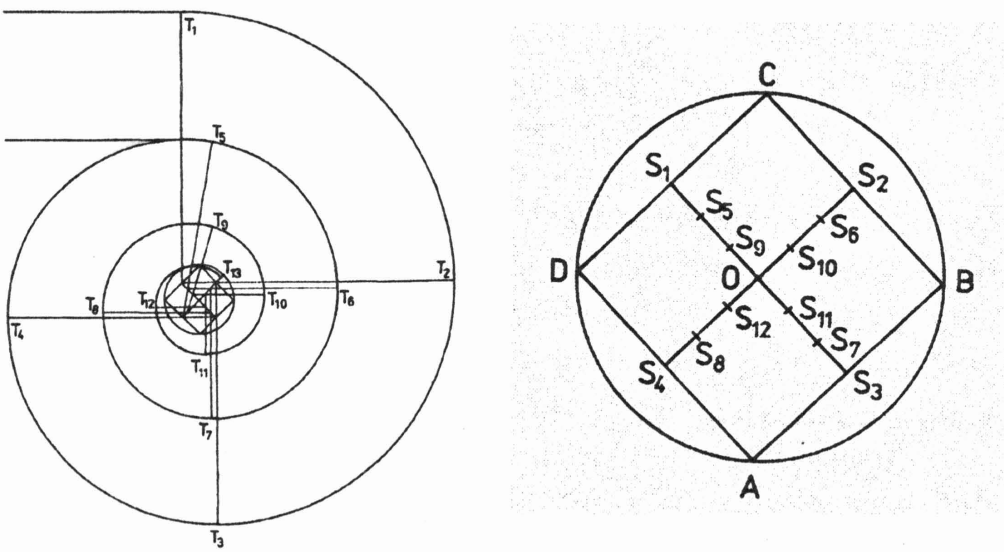


Obr. 2



Obr. 3

Nejpoužívanější byla pravděpodobně konstrukce voluty rekonstruovaná v renesanci, ale ani tu nebylo možné použít na všechny iónské hlavice, např. na řecké. V poznámkách k publikaci [3] jsou opět nepřesnosti, proto konstrukci odvodíme z obrázku 3 tam uvedeného a ověříme výpočtem.



Obr. 4

Výšku voluty opět rozdělíme od abaku na 4, 1 a 3 dílky. Nad druhým dílkem sestrojíme volutové oko. Do oka vepíšeme čtverec

$ABCD$ tak, aby jedna jeho úhlopříčka byla svislá. Střední příčky čtverce rozdělíme na šest stejných dílků (viz detail obr. 4). Nyní již můžeme přistoupit ke konstrukci jednotlivých kružnicových oblouků, sledujte detail i celý obraz.

Kružnicové oblouky T_1T_2, T_2T_3, T_3T_4, T_4T_5 mají středy postupně ve středech S_1, S_2, S_3, S_4 stran čtverce $ABCD$. Další čtyři oblouky, T_5T_6, T_6T_7, T_7T_8, T_8T_9, mají středy S_5, S_6, S_7, S_8 v jedné šestině středních příček od středů stran čtverce $ABCD$. Poslední čtyři oblouky, T_9T_{10}, $T_{10}T_{11}$, $T_{11}T_{12}$, $T_{12}T_{13}$, mají středy S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12} v jedné třetině středních příček od středů stran čtverce $ABCD$.

Poloměry jednotlivých oblouků, kde r je poloměr oka, jsou

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{17}{2}r, & r_7 &= \frac{25-\sqrt{26}}{6}r\\
r_2 &= \frac{15}{2}r, & r_8 &= \frac{21-\sqrt{26}}{6}r\\
r_3 &= \frac{13}{2}r, & r_9 &= \frac{21-\sqrt{26}-\sqrt{10}}{6}r\\
r_4 &= \frac{11}{2}r, & r_{10} &= \frac{19-\sqrt{26}-\sqrt{10}}{6}r\\
r_5 &= \frac{33-\sqrt{26}}{6}r, & r_{11} &= \frac{17-\sqrt{26}-\sqrt{10}}{6}r\\
r_6 &= \frac{29-\sqrt{26}}{6}r, & r_{12} &= \frac{15-\sqrt{26}-\sqrt{10}}{6}r
\end{aligned}
$$

Poslední oblouk $T_{12}T_{13}$ by se měl dotýkat oka. Mělo by tedy být $|OT_{13}| = r$, avšak

$$|OT_{13}| = r_{12} - \frac{1}{6}|AB| = \frac{15-\sqrt{2}(\sqrt{13}+\sqrt{5}+1)}{6}r,$$

tj. přibližně 0,88741487 r.

3. Apolloniova úloha a Fordovy kružnice

V jedné z Apolloniových úloh je třeba sestrojit kružnici, která se dotýká dvou kružnic a přímky. Její řešení najdeme v učebnicích geometrie, ale také jako jeden z mnoha příkladů fraktálů

– Apollonian filling, (obr. 5a). Nás bude zajímat souvislost této úlohy s teorií racionálních čísel.

Označme proto r_1, r_2 poloměry dvou daných kružnic k_1, k_2 s vnějším dotykem a d_{12} vzdálenost jejich bodů dotyku T_1, T_2 s přímkou t, obr. 5b. Dále označme r_3 poloměr kružnice k_3, která se dotýká daných kružnic a přímky t v bodě T_3, $d_{13} = |T_1T_3|$ a $d_{23} = |T_2T_3|$.

Podle Pythagorovy věty platí

$$d_{12}^2 = 4r_1r_2\,, \quad d_{13}^2 = 4r_1r_3\,, \quad d_{23}^2 = 4r_2r_3.$$

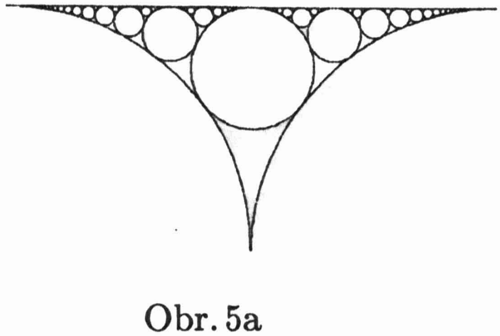
Z posledních dvou rovnic je $d_{13} : d_{23} = \sqrt{r_1} : \sqrt{r_2}$. Dosazením z první rovnice za r_1 (přitom $d_{23} = d_{12} - d_{13}$) dostaneme rovnici pro d_{13}

$$\frac{d_{13}}{d_{12} - d_{13}} = \frac{d_{12}}{2r_2}.$$

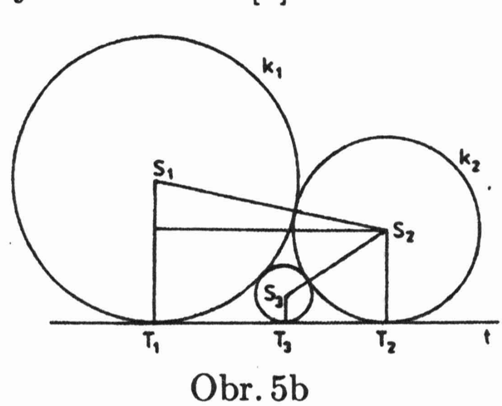
Potom

$$d_{13} = \frac{d_{12}^2}{2r_2 + d_{12}}\,, \quad r_3 = \frac{d_{13}^2}{4r_1}.$$

Z posledních dvou rovnic vyplývá, že jsou-li poloměry r_1, r_2 daných dvou kružnic a vzdálenost d_{12} jejich bodů dotyku s danou přímkou racionální čísla, jsou i poloměr r_3 kružnice k_3 a vzdálenosti d_{13} a d_{23} jejího bodu dotyku s přímkou t racionální čísla. Takové kružnice se nazývají Fordovy kružnice viz [1].



Obr. 5a



Obr. 5b

Snadno se přesvědčíme, že námi vypočítané d_{13} je menší než dané d_{12}. Proto ke každému racionálnímu číslu z intervalu $(0, d_{12})$ existuje právě jedna kružnice k_3.

4. Apolloniovy kružnice a úloha GPS

Od nepaměti se člověk zabýval problémem určení okamžité polohy v prostoru a vytyčováním zvolené trasy. K tomuto cíli nejúčinnějším systémem je od roku 1993 plně funkční systém GPS (globální polohový systém). V současné době je tvořen 27 družicemi (z toho jsou tři záložní) rovnoměrně rozmístěnými ve výšce asi 20 200 km nad Zemí po čtyřech na šesti oběžných drahách, jejichž roviny jsou navzájem pootočené kolem zemské osy o 60° a od roviny rovníku odkloněné cca o 50°. Družice na téměř kruhových drahách jsou rozmístěny tak, aby z libovolného místa na Zemi byly viditelné aspoň čtyři.

V GPS se informace o poloze uživatele N určuje z jeho vzdáleností od jednotlivých družic S_i. Pro určení polohy uživatele v rovinném případě by stačily družice dvě. Vzhledem k tomu, že družice vysílají signál, pro který uživatel měří čas příjmu, je potřebná ještě družice třetí. Problém je v synchronizaci času vysílače a přijímače, a proto se neurčuje přímá vzdálenost, ale rozdíl vzdáleností přijímače vždy od dvou družic.

Předpokládejme tedy tři družice S_0, S_1, S_2. Kartézskou soustavu souřadnic zvolme tak, že počátek je v bodě S_0, na ose x leží bod $S_1[x_1; 0]$ a bod $S_2[x_2; y_2]$ je v souřadnicové rovině xy. Potom hledaného příjemce označíme $N[x; y]$.

Čas, za který signál dojde z družice S_0 k příjemci N označme t, potom z družic S_i dojde do N za čas $t + t_i$, tj. o časový rozdíl t_i, $i = 1, 2$ dříve nebo později. Rychlost signálu označíme v.

Sférické vlnoplochy, které mají středy v družicích S_0, S_1, S_2 a procházejí stanovištěm N uživatele, mají vyjádření:

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 &= v^2 t^2, \\ y^2 + (x_1 - x)^2 &= v^2 (t + t_1)^2, \\ (y_2 - y)^2 + (x_2 - x)^2 &= v^2 (t + t_2)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Jestliže první rovnici odečteme od zbývajících rovnic, dostaneme dvě lineární algebraické rovnice pro tři neznámé x, y, t

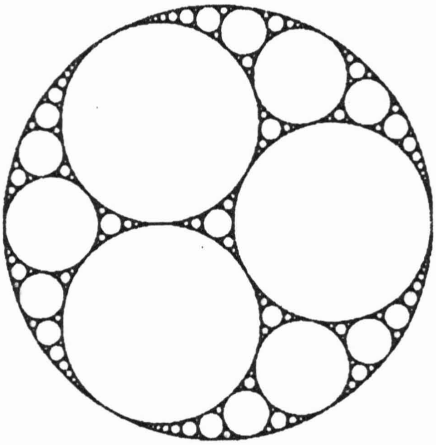
$$\begin{aligned} 2x_1 x &= -2v^2 t_1 t - v^2 {t_1}^2 + {x_1}^2, \\ 2y_2 y + 2x_2 x &= -2v^2 t_2 t - v^2 {t_2}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2. \end{aligned}$$

Vyloučením t dostaneme rovnici přímky

$$2(t_1x_2 - t_2x_1)\,x + 2t_1y_2\,y = v^2t_1t_2(t_1 - t_2) + t_1(x_2^2 + y_2^2) - t_2x_1^2.$$

Bod N je průsečíkem této přímky s kružnicí $x^2 + y^2 = v^2t^2$, tedy řešením kvadratické a lineární rovnice.

Rovnice (1) vlastně popisují obecnou Apolloniovu úlohu, kdy hledáme kružnici dotýkající se tří kružnic. Také řešení této úlohy najdeme v publikacích o geometrii, ale také na stránkách fraktálů jako *Apollonian gasket* (obr. 6).



Obr. 6

Literatura

[1] Rademacher, M., *Lectures on Elementary Number Theory*, Praha, 1965.

[2] Ryšavý, J., *Praktická geometrie*, ČMT, Praha, 1941.

[3] Vitruvius, P., *Deset knih o architektuře*, Svoboda, Praha, 1979.

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta stavební ČVUT,
Thákurova 7
166 29 Praha 6
e-mail: Milada.Kocandrlova@fsv.cvut.cz