Milan Hejný; Marie Tichá

Matematické příběhy (8): Příběh osmý. Vánoční turnaj

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 2, 80–89

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150803`

MATEMATICKÉ PŘÍBĚHY[2] (8)

Příběh osmý

VÁNOČNÍ TURNAJ

Milan Hejný, Marie Tichá

Stejně jako minulý rok, chtěli si i letos chlapci zahrát hokejový turnaj. Domluvili se na tom ještě ve škole. Turnaj měl začít až 25. prosince, protože to už mnozí z nich budou mít novou hokejovou výzbroj a výstroj, kterou najdou pod vánočním stromečkem. Termíny zápasů, hřiště, dokonce i rozhodčí – všechno bylo pevně stanovené. Nezbývalo nic jiného, než trpělivě čekat.

Konečně nadešlo ráno 25. prosince. Filip sedí v pyžamu u nových hokejových rukavicích na posteli. V tom okamžiku zazvonil zvonek.

Před dveřmi stál Matěj. Přišel s rozumným návrhem: „Víš co, připravme si tabulku, aby bylo do čeho psát výsledky, až turnaj začne.“

Filip přidal další nápad: „Bylo by dobré najít loňskou tabulku, abychom mohli porovnávat, jak bude turnaj dopadat letos.“ Sám však nevěřil, že by byl schopen ve svém „pořádku“ najít rok starou tabulku. Podstatně nadějnější bylo snažit se vzpomenout si na výsledky.

Loňský turnaj se nesl pod heslem Bimbové. Toto hanlivé označení získalo každé mužstvo, které v některém zápase nedalo ani jeden gól. Zápasy, ze kterých takové označení pro některé družstvo vzešlo, si chlapci dobře pamatovali. Bylo jich 6, přičemž z jednoho zápasu si označení Bimbové odnesla obě mužstva; zápas Adamové (A) versus Bohoušové (B) skončil nerozhodně 0 : 0.

---

[2] Článek byl napsán s podporou grantu GAČR 406/02/0829. Upraveno podle stejnojmenného příběhu knížky M. Hejný, Ľ. Niepel: Šestnásť matematických príbehov, SNP, Bratislava 1983.

Filip s Matějem si do připravené tabulky zapsali všechny údaje, které si od loňska zapamatovali. Jednotlivá mužstva označili podle jmen jejich kapitánů A (Adamové), B (Bohoušové), C (Cyrilové), D (Dušanové) a E (Edové).

	A	B	C	D	E	body	skóre	pořadí
A	×	0 : 0	:	: 0	:		6 :	
B	0 : 0	×	:	:	: 0		3 : 4	5
C	:	:	×		: 0		6 :	2
D	0 :	:	: 0	×	0 :	4	3 : 5	4
E	:	0 :	0 :	: 0	×		4 :	

„Víme, že víc nul už v tabulce nebylo, ale co dále," vzdychl Matěj. Chvíli tiše přemýšleli a v tom Matějovi svitlo, že mužstvo B (Bohoušové) dalo v turnaji celkem tři góly. Přitom v každém ze zápasů s C, D i E dali aspoň jeden gól, protože z těchto zápasů Bohoušové nevyšli jako Bimbové. Je tedy možné usoudit, že v každém z těchto zápasů dali právě jeden gól.

„To je chytré," uznal Filip.

Za minutu nadšeně vykřikl: „Všimni si Dušanů. Získali 4 body. Prohráli s A i s E. Nutně tedy museli vyhrát s B i s C. Celkem však dali jen tři góly. To je možné jen tehdy, že zápas D s B skončil 2 : 1 (protože v něm nebyli Bimbové) a zápas D s C dopadl 1 : 0."

„Bohoušové celkem vyfasovali čtyři kusy. Jestliže 2 dostali od Dušanů, pak zbývající dva museli dostat od Cyrilů, protože od A ani od E neinkasovali ani jeden gól."

Už se zdálo, že chlapci bez problémů zaplní prázdná místa v tabulce. Ale právě tehdy se zasekli – ne a ne něco rozumného vymyslet.

Po hodně dlouhé chvíli Filip začal: „Zdá se mi, že Edové v turnaji získali celkem 4 body. Méně získat nemohli, protože se umístili lépe než Dušanové, kteří získali čtyři body. Ale více také nemohli získat, protože dva zápasy – s C a D – prohráli."

Matěj, jako projev souhlasu, zapsal Edovu družstvu do tabulky 4 body a začal nahlas uvažovat o získaných bodech: „V turnaji bylo sehráno 10 zápasů, přičemž v každém z nich byly rozděleny dva body. Ve sloupci ‚body' tedy musí být součet 20. Z toho na mužstva B, D, E připadá 11 bodů, to už jsme zjistili; pro družstva A a C tedy dohromady zbývá 9 bodů. Ve výsledném pořadí jsou to však první dvě mužstva, a proto ani jedno z nich nezískalo méně než 4 body.“

„Adamové tedy získali pět bodů a my, Cyrilové, čtyři,“ uzavřel Filip Matějovu řeč a dodal: „Máš pravdu, tak to bylo, my jsme to druhé místo získali díky skóre, už si vzpomínám.“

Po tomto úspěchu ve vyplňování tabulky, kterého chlapci dosáhli, následovalo více neúspěchů. Začmáraná tabulka jasně ukazovala, že je třeba postupovat systematičtěji. Na Matějovu radu si tabulku načrtli znovu a všechny chybějící údaje v ní nahradili písmeny:

	A	B	C	D	E	body	skóre	pořadí
A	×	0 : 0	$a:b$	$c:0$	$d:e$	5	$6:x$	1
B	0 : 0	×	1 : 2	1 : 2	1 : 0	3	3 : 4	5
C	$b:a$	2 : 1	×	0 : 1	$f:0$	4	$6:y$	2
D	$0:c$	2 : 1	1 : 0	×	$0:g$	4	3 : 5	4
E	$e:d$	0 : 1	$0:f$	$g:0$	×	4	$4:z$	3

Když sečetli góly v jednotlivých řádcích, dostali několik rovnic:

(řádek A)	$a+c+d=6$	$b+e=x$
(řádek B)	$b+f=4$	$a+2=y$
(řádek C)		$c+g=4$
(řádek D)	$e+g=4$	$d+f=z-1$

Všechna čísla a, b, c, d, e, f, g jsou větší než nula, protože v tabulce nejsou kromě těch, které jsou již zapsané, žádné další nuly (a je také jasné, že všechna čísla v tabulce jsou celá). Dále je jasné, že C prohrálo s A, protože celkově získalo 4 body a z obdobných důvodů můžeme tvrdit, že E vyhrálo nad A. To znamená, že

$$a>b>0, \qquad e>d>0.$$

Dále víme, že mužstva C, D, E měla stejný počet bodů; proto z těchto tří mělo nejlepší skóre mužstvo C a nejhorší mužstvo D.

Na základě známého pořadí usuzujeme:

$$6 - y > 4 - z > 3 - 5$$

Levou nerovnici můžeme zapsat ve tvaru $z > y - 2$, pravou ve tvaru $6 > z$. Dostáváme tedy:

$$6 > z > y - 2$$

Když měli chlapci všechno zapsané a zkontrolované, najednou se bezradně zarazili. Těch rovnic a nerovnic bylo nějak mnoho.

„Mám návrh," nerozhodně začal Matěj. „Zkusme některé číslo zvolit. Například zvolme $a = 1$. Co ty na to?"

„Počkej, a nemůže být rovno jedné, vadilo by to v nerovnosti $a > b > 0$; když b je aspoň 1, potom a musí být aspoň 2."

„Máš pravdu. Nechť tedy $a = 2$."

„Počkej! Šikovnější bude volit e, neboť potom snadno z řádků D a E určíme, čemu se rovná c i g. Navíc z nerovnosti $e > d > 0$ vidíme, že $e > 1$. Zkusme $e = 2$."

„Prosím, ať je po tvém," souhlasil Matěj a zapsal $e = 2$. Potom vypočítali $g = 2$, $c = 2$, $d = 1$, $a = 3$, $y = 5$.

„Víme, že $b < a = 3$. Vyzkoušejme tedy obě možnosti, nejprve $b = 1$, potom $b = 2$," navrhl Filip.

Ukázalo se, že obě možnosti vyhovují. První vedla k řešení $b = 1$, $x = 3$, $f = 3$, $z = 5$. Druhá k řešení $b = 2$, $x = 4$, $f = 2$, $z = 4$.

„A jsme v háji," komentoval Matěj situaci.

„Máš pravdu. Už teď máme dvě řešení, a to jsme zkusili jen případ $e = 2$. A co když $e = 3$, $e = 4$, ... "

„Zadrž! Mluvíš nesmysly! Podívej, $e + g = 4$ a $g > 0$. Proto číslo e může být maximálně rovno třem. Je tedy potřeba zkusit už jen jeden případ: $e = 3$."

Ukázalo se, že je jednoduchý. Měl jediné řešení; $e = 3$, $g = 1$, $c = 3$, $d = 1$, $a = 2$, $y = 4$, $b = 1$, $c = 4$, $f = 3$, $z = 5$. Ale i tak bylo možné tabulku doplnit třemi způsoby a kluci nevěděli, který z nich odpovídá skutečnosti.

„Víš co, zatelefonujeme Vítkovi. Ten si bude určitě pamatovat některé výsledky. Například toho mače, ve kterém neproměnil trestnou střelu," navrhl Filip.

„Dobře, máš prav... Ne, není třeba telefonovat. Přece víme, že to bylo v zápase Dušanova mužstva s Edovým. Pamatuješ? Stačilo, aby Vítek proměnil trestňák a Dušanové by předběhli Edy."

„Ano! Kdyby tedy bylo v zápase D s E místo 0 : g výsledné skóre 1 : g, pak by D bylo na třetím a E na čtvrtém místě. Nás to ohrozit nemohlo. A je to jasné! Muselo být $g = 2$ a $z = 5$."

Vyčerpaní přátelé padli na válendu a začali se smát jako střelení. Měli radost z rekonstruované tabulky.

Podstatu Matějova a Filipova řešení lze zformulovat takto: ze známých údajů logickou úvahou odvodili neznámé údaje. Takovou činnost v podstatě vykonávají matematikové už od počátků matematiky jako vědní disciplíny. Ale až v minulém století si vědci začali blíže všímat samotného procesu získávání informací. V letech 1940 – 1950 americký matematik C. E. Shannon zformuloval základní pojmy a tvrzení nové disciplíny, která dostala název teorie informací. Za posledních 50 roků tato teorie zaznamenala úžasný rozmach. Proč? Teorie informací vyzbrojená počítači úspěšně zasahuje do nejrozmanitějších oblastí lidské činnosti – do řízení továren, organizace dopravy, evidence občanů jednotlivých států, plánování výživy, výzkumu rakoviny, dešifrování písemných památek vyhynulých národů atd.

V tabulce, se kterou Matěj a Filip začínali, bylo 19 informací: 18 číselných a 1 slovní – „víc než 14 nul v tabulce není". Pokuste se zamyslet nad tím, která z uvedených 19 informací je nejcennější, nejhodnotnější. Jak je možné vymezit pojem hodnota informace? Je možné hodnotu informace nějak měřit? Jak?

Odpovědi na tyto otázky tvořily základ Shannonovy teorie informací. Když se nyní zaberete do řešení úloh, zkuste se občas zamyslet nad otázkou, která z informací v té-které úloze je nejhodnotnější a proč.

Úloha 1. Tři mužstva hrají turnaj systémem každý s každým. Po dvou odehraných zápasech je situace taková, jak to vidíte v následující tabulce.

	A	B	C	body	skóre	pořadí
A	×	3 : 2	0 : 5			3
B	2 : 3	×				1
C	5 : 0		×			2

Kromě toho víte, že v posledním zápase nepadlo více než 5 gólů. Jak musí skončit zápas mezi mužstvy B a C, aby konečné pořadí bylo: 1. – B, 2. – C, 3. – A?

Úloha 2. Turnaje se účastní 4 mužstva – A, B, C, D. Uměli byste doplnit tabulku, jestliže vám prozradíme skóre pěti v tabulce dosud neuvedených zápasů: 2 : 0, 1 : 1, 2 : 2, 3 : 1, 5 : 3?

	A	B	C	D	body	skóre	pořadí
A	×				6		
B		×		1 : 0		2 :	
C			×			: 8	
D				×			

Úloha 3. Zkuste zapsat tabulku turnaje tří mužstev A, B, C, jestliže víte, že:

1. mužstvo A získalo 2 body a mělo konečné skóre 1 : 2,
2. mužstvo B mělo konečné skóre 4 : 3,
3. mužstvo C dalo v turnaji právě 4 góly.

Úloha 4. Napište tabulku turnaje tří mužstev A, B, C, jestliže víte, že:

1. mužstvo A dalo celkem 2 góly,
2. mužstvo B dalo celkem 5 gólů a získalo právě 2 body,
3. mužstvo C dalo celkem 3 góly a skončilo na druhém místě,
4. ani v jednom zápase žádné družstvo nedalo víc než tři góly.

Úloha 5. Úloha je stejná jako předcházející, jen podmínka 4 se mění:

4. ani jeden z odehraných zápasů neskončil jednobrankovým rozdílem.

*Úloha 6.** Turnaj hrála 4 mužstva A, B, C, D. Uměli byste napsat tabulku turnaje, jestliže víte, že:

1. mužstvo A dostalo celkem 4 góly, z toho polovinu od D,
2. mužstvo B dalo celkem 5 gólů, ale ani jeden do sítě C,
3. mužstvo C dalo 5 gólů, dostalo 6 gólů, z toho jeden od A,
4. mužstvo D dalo celkem 7 gólů, od mužstva C dostalo 2 góly,
5. v prvním kole padlo 11 gólů,
6. po prvním kole bylo mužstvo D v čele, po třetím bylo druhé,
7. po druhém kole bylo pořadí A, B, D, C (A první, C poslední).

Poznámka: V každém turnaji se hraje systémem každý s každým jeden zápas. V turnaji čtyř mužstev hraje v každém kole každé mužstvo jeden zápas. Turnaj má tedy tři kola. O pořadí mužstev rozhoduje počet získaných bodů. V případě, že některá družstva získala stejný počet bodů, bude v konečném pořadí lepší to, u kterého je rozdíl gólů, které dalo a gólů, které inkasovalo, větší. Je-li i tento rozdíl stejný, rozhoduje podíl vsítěných a inkasovaných gólů – lepší je to družstvo, které ho má větší. (Například: Stejný bodový zisk mají družstva A, B, C, přičemž jejich skóre je: A – 9 : 6, B – 7 : 5, C – 6 : 4. Nejlepší z nich je tedy A (má rozdíl 3, zatímco B i C mají rozdíl 2). Další je C, protože má podíl 6 : 4 = 1,5 a B má podíl 7 : 5 = 1,4.) Jestliže má několik družstev všechny tyto ukazatele stejné, pak se dělí o pořadí.

Řešení

Úloha 1. Výsledky dvou zápasů znáte, neznáte ale výsledek třetího zápasu mezi mužstvy B a C. Označte ho $a : b$. Mužstvo A získalo 2 body a skončilo až za mužstvem B. Proto muselo i mužstvo B získat aspoň 2 body – vyhrálo tedy nad C. Proto $a > b$. Jelikož každé mužstvo získalo 2 body, rozhodovalo o pořadí skóre. Rozdíl skóre pro jednotlivá mužstva byl: pro A (-4), pro B $(a - b - 1)$, pro C $(5 + b - a)$. Odtud dostaneme: $a - b - 1 \geq 5 + b - a \geq -4$. Po úpravě dostanete $9 + b \geq a \geq b + 3$. Jestliže ještě přidáte podmínku $a + b \leq 5$, dostanete následující čtyři možnosti: 1) $a = 3$, $b = 0$, nebo 2) $a = 4$, $b = 0$, nebo 3) $a = 4$, $b = 1$, nebo 4) $a = 5$, $b = 0$. V prvním a třetím případě mají mužstva B a C stejný rozdíl i podíl skóre. To odporuje pořadí mužstev. Proto jsou pouze dvě možnosti výsledku zápasu B versus C – 4 : 0 nebo 5 : 0.

Úloha 2. Tabulku opět postupně doplňujte známými údaji. Mužstvo A získalo 6 bodů a muselo tedy vyhrát všechny zápasy. Vzhledem k tomu, že mužstvo B dalo celkem jen 2 góly, muselo s mužstvem A prohrát v poměru 0 : 2. Jelikož mužstvo C inkasovalo celkem 8 gólů, z toho jen jeden od B, prohrálo s některým mužstvem v poměru 3 : 5. Mohlo to být pouze mužstvo A, protože zápasy s B a D skončily remízami (jinde ty remízy nemají místo). Další doplňování tabulky je jednoduché, dostanete:

	A	B	C	D	body	skóre	pořadí
A	×	2 : 0	5 : 3	3 : 1	6	10 : 4	1
B	0 : 2	×	1 : 1	1 : 0	3	2 : 3	2
C	3 : 5	1 : 1	×	2 : 2	2	6 : 8	3
D	1 : 3	0 : 1	2 : 2	×	1	3 : 6	4

Úloha 3. Nejprve je třeba doplnit konečné skóre mužstva C. Jak je možné ho zjistit? Z celkových počtů vstřelených a inkasovaných gólů, které musí být stejné. Mužstvo C má tedy konečné skóre 4 : 4. Vzhledem k tomu, že mužstvo A má dva body a skóre 1 : 2, muselo jeden zápas vyhrát v poměru 1 : 0 a druhý prohrát v poměru 0 : 2. Z toho a z konečného skóre mužstev B a C vyplývá, že obě mužstva získala po dvou bodech. Budete-li předpokládat, že zápas mezi mužstvy B a C skončil v poměru $a : b$, pak je pro čísla a, b splněn aspoň jeden ze dvojic vztahů

a) $4-a=0,\ 3-b=1$ b) $4-a=2,\ 3-b=0$

$4-b=2,\ 4-a=0$ $4-b=0,\ 4-a=1$

První ze vztahů znamená vítězství mužstva A nad mužstvem B, druhý odpovídá vítězství mužstva A nad mužstvem C. Úloha má řešení jen v případě platnosti prvního vztahu. Mužstvo B tedy zvítězilo nad mužstvem C v poměru 4 : 2. Výsledná tabulka je tato:

	A	B	C	body	skóre	pořadí
A	×	1 : 0	0 : 2	2	1 : 2	3
B	0 : 1	×	4 : 2	2	4 : 3	1
C	2 : 0	2 : 4	×	2	4 : 4	2

Úloha 4. Položme si otázku, kolik bodů získalo mužstvo C. Kdyby to bylo méně než 2, bylo by na posledním místě. Kdyby to bylo více než 2, bylo by na prvním místě. My ale víme, že mužstvo C skončilo na druhém místě. Proto mužstvo C získalo 2 body, a tedy i mužstvo A získalo 2 body. O pořadí mužstev rozhodlo skóre. Dále si uvědomíme, že kdyby v turnaji byla jedna remíza pak by všechny tři zápasy musely končit nerozhodně, protože jinak není možné dosáhnout toho, že každé mužstvo má 2 body. Pak by se ovšem mužstva dělila o první až třetí místo a mužstvo C by nebylo druhé. Každé mužstvo jednou vyhrálo a jednou prohrálo. Mužstvo B celkově dalo 5 gólů a v žádném zápase jich nedalo víc než 3. Muselo tedy jeden zápas vyhrát v poměru $3 : a$ a druhý prohrát v poměru $2 : 3$. Mužstvo A celkově vsítilo jen 2 góly, tedy nad mužstvem B muselo zvítězit mužstvo C v poměru $3 : 2$. Jestliže si označíme písmenem b počet gólů, které vstřelilo mužstvo A v zápase s mužstvem C, můžete do tabulky zapsat toto:

	A	B	C	body	skóre	pořadí
A	×	$a : 3$	$b : 0$	2	$2 : 3$	3
B	$3 : a$	×	$2 : 3$	2	$5 : 3 + a$	1
C	$0 : b$	$3 : 2$	×	2	$3 : 2 + b$	2

Teď již lehce zjistíme, že podmínkám úlohy vyhovují dvě dvojice čísel: $a = 0$, $b = 2$ nebo $a = 1$, $b = 1$. V obou případech je v celkovém pořadí mužstvo B první a mužstvo A třetí.

Úloha 5. Ani jedno mužstvo nehrálo s rozdílem menším než dvoubrankovým. Mužstvo A tedy v jednom zápase zvítězilo $2 : 0$ a ve druhém nedalo ani gól. Pokud by mužstvo A zvítězilo nad mužstvem B v poměru $2 : 0$, pak by mužstvo C inkasovalo od mužstva B 5 gólů a skončilo by na posledním místě. To je však v rozporu s tím, co jsme předpokládali. Mužstvo A tedy zvítězilo nad mužstvem C. Tabulku můžete doplnit následovně:

	A	B	C	body	skóre	pořadí
A	×	$0 : a$	$2 : 0$	2	$2 : a$	3
B	$a : 0$	×	$b : 3$	2	$5 : 3$	1
C	$0 : 2$	$3 : b$	×	2	$3 : 2 + b$	2

Ze vztahů $b \le 1$, $a+b=5$ vypočítáte dvě dvojice čísel a, b, které vyhovují podmínkám úlohy. Jsou to dvojice $a=5$, $b=0$; $a=4$, $b=1$.

Úloha 6. Tabulka s údaji ze zadání vypadá takto:

	A	B	C	D	body	skóre	pořadí
A	×	$a:b$	$1:c$	$d:2$		$1+a+d:4$	
B	$b:a$	×	$0:2$	$f:0$		$5:a+e$	
C	$c:1$	$e:0$	×	$2:5$		$5:6$	
D	$2:d$	$0:f$	$5:2$	×		$7:2+d+f$	2

Čísla a, b, c, d, e, f musí splňovat vztahy $a+b=4$, $b+c=2$, $b+f=5$, $c+e=3$, $e+f=6$. Jelikož $b \le 2$, pokuste se úlohu řešit pro $b=0$ nebo 1 nebo 2. Pro jednotlivé hodnoty b dostanete následující řešení

$$b=2,\quad a=2,\quad c=0,\quad f=3,\quad e=3$$
$$b=1,\quad a=3,\quad c=1,\quad f=4,\quad e=2$$
$$b=0,\quad a=4,\quad c=2,\quad f=5,\quad e=1$$

Z uvedených řešení vyhovuje podmínkám úlohy pouze druhé; konečná tabulka vypadá takto:

	A	B	C	D	body	skóre	pořadí
A	×	3 : 1	1 : 1	2 : 2	4	6 : 4	1
B	1 : 3	×	0 : 2	4 : 0	2	5 : 5	4
C	1 : 1	2 : 0	×	2 : 5	3	5 : 6	2
D	2 : 2	0 : 4	5 : 2	×	3	7 : 8	2

Prof. Milan Hejný
KMDM UK, M. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: milan.hejny@pedf.cuni.cz

Mgr. Marie Tichá
MÚ AVČR, Žitná 25
115 67 Praha 1
e-mail: ticha@math.cas.cz