

Učitel matematiky

Jaroslav Zhouf; Václav Sýkora

Otevřené úlohy do státní maturitní zkoušky z matematiky

Učitel matematiky, Vol. 11 (2003), No. 1, 34–39

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150793>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2003

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

OTEVŘENÉ ÚLOHY DO STÁTNÍ MATURITNÍ ZKOUŠKY Z MATEMATIKY

JAROSLAV ZHOUF, VÁCLAV SÝKORA

Tento článek je v pořadí již třetím článkem, který se zabývá připravovanou státní maturitní zkouškou z matematiky. V úvodu opět připomeňme, že následující řádky zohledňují současný stav příprav budoucí státní maturitní zkoušky. Tyto přípravy procházejí řadou diskusí a výsledná podoba maturit může být odlišná od té, kterou zde uvádíme. Zůstaňme však u současné situace. Mimo jiné se předpokládá, že státní část maturitní zkoušky z matematiky by měla mít formu testu jednak s tzv. *uzavřenými* úlohami, jednak s tzv. *otevřenými* úlohami.

Připomeňme si, co si autorský kolektiv zabývající se tvorbou úloh do tohoto testu představuje pod pojmy úloha uzavřená a úloha otevřená. Pro ilustraci je možné se s velkým množstvím obou typů úloh seznámit v publikacích uvedených v literatuře.

Uzavřenou úlohou se rozumí úloha, v níž je žákovi nabídnuto několik odpovědí a ten z nich má vybrat jedinou správnou. Úlohy mají takovou obtížnost, aby je bylo možné s jistotou vyřešit za 3 – 5 minut. U úloh tohoto typu se nehodnotí postup řešení, hodnotí se jen správnost výsledku.

Otevřenou úlohou se rozumí úloha, v níž se hodnotí nejen správný výsledek, zejména však podrobný postup, s jehož pomocí žák k výsledku dospěl. Většinou jde o komplexní úlohu, v níž se integrují žákovy poznatky a dovednosti z celého studia na střední škole. Na řešení každé úlohy tohoto typu je stanoven čas 15 – 20 minut.

S uzavřenými úlohami jsme vás seznámili v článku *Uzavřené úlohy do státní maturitní zkoušky z matematiky* (viz *Učitel matematiky*, č. 43, str. 164 – 173). V tomto článku se zaměříme na úlohy

otevřené. Chceme zde na konkrétních příkladech ukázat formu otevřených úloh, jak si je autorský kolektiv představuje. Stejně jako v předchozím článku nebudeme ani zde úlohy řešit, neboť, jak znovu připomínáme, chceme pouze představit úlohy tohoto typu. Uvedeme devět úloh, každou z jiného tématu citovaného v *Katalogu požadavků ke společné části maturitní zkoušky z matematiky v roce 2004*.

V článku o uzavřených úlohách jsme rozebírali specifika každé úlohy. U otevřených úloh se s podobnými jednotlivými specifiky setkáváme také, nejsou však určující při přípravě těchto úloh. Pro tvorbu otevřených úloh do státní části maturitní zkoušky si autorský kolektiv stanovil poněkud jiné zásady specifické pro tento typ úloh. Vytyčené zásady nejsou stanoveny jen pro tvorbu jednotlivých úloh, jsou též stanoveny s ohledem na celý soubor otevřených úloh, které by měly v testu trvajícím 60 minut být. Mezi nejdůležitější zásady patří:

- členění složitější úlohy na několik dílčích úkolů tak, aby žák mohl vyřešit aspoň část zadaných úkolů,
- nezávislost jednotlivých dílčích úkolů, aby nevyřešení jednoho úkolu neznamenal zablokování řešení celé úlohy,
- současné zařazení komplexní úlohy s jedinou otázkou, kde musí žák sám členit řešení na dílčí úkoly,
- propojení více oblastí matematiky v jedné úloze dílčími úkoly,
- možnost řešení úlohy více způsoby,
- přiměřená časová náročnost,
- přiměřená míra složitosti úprav v řešení pro žáka i pro opravovatele,
- „čitelnost“ textu, nezařazování složitých souvětí v textu úlohy,
- zařazení většího počtu úloh s reálnou tematikou, kterou je třeba správně matematizovat a výsledek zpět převést do reálné situace.

Je jasné, že zde nemohou být uvedeny všechny použité zásady a že ani není možné všechny zásady stanovit. Je také jasné, že se vždy nepodaří použít všechny zásady při tvorbě každé úlohy. V testu jako celku by však těchto zásad mělo být použito co nejvíce.

Na závěr uvádíme bez dalšího komentáře devět otevřených úloh, které by podle autorského kolektivu mohly být zařazeny do státní části maturitní zkoušky z matematiky. U uvedených úloh nehledíme na jejich obtížnost, tj. neuvažujeme, zda by úloha byla použita v základní úrovni, neboť ve vyšší úrovni. I když je u každé následující úlohy uvedeno její zařazení do konkrétního tématu, je to zařazení podle jejího majoritního obsahu, nebo podle zásad výše uvedených jsou otevřené úlohy většinou koncipovány tak, aby obsahovaly problémy z více témat.

1. Úloha z tématu *Číselné množiny*:

Pro všechny přípustné hodnoty čísel a, b, c, x platí

$$a = \sqrt{x-1}, \quad b = a^2, \quad c = \sqrt{b+5}.$$

a) Vyjádřete výraz $2a + \frac{b+2}{c}$ pomocí proměnné x .

b) Určete všechna čísla x , pro něž má výraz racionální hodnotu.

2. Úloha z tématu *Algebraické výrazy*:

Jsou-li a, b, c, d čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla, dokažte, že součet $a + b^2 + c^3$ je dělitelný číslem d .

3. Úloha z tématu *Rovnice a nerovnice*:

Dva dělníci vyrobí za 8 hodin společně 136 stejných součástek. Kdyby první dělník vyrobil za jednu hodinu o dvě součástky méně a druhý o jednu více, trvala by druhému dělníkovi výroba jedné součástky o 4 minuty méně než prvému. Kolik součástek vyrobí první dělník za jednu hodinu?

4. Úloha z tématu *Funkce*:

V papírenském závodu vyrábějí kartónové krabice bez víka. Krabice mají výšku 2 dm, délka hrany jejich čtvercové podstavy se mění od 2 dm do 10 dm.

- Napište předpis pro funkci vyjadřující závislost obsahu kartónu spotřebovaného na výrobu jedné krabice na délce hrany podstavy. Načrtněte graf této funkce.
- Napište předpis pro funkci vyjadřující závislost objemu krabice na délce hrany podstavy. Načrtněte graf této funkce.
- Odhadněte z grafů obou funkcí délku podstavné hrany, pro něž je objem krabice číselně roven obsahu kartónu potřebného na její výrobu. Výpočtem se přesvědčte o správnosti odhadu.

 5. Úloha z tématu *Posloupnosti*:

Výraz

$$a_n = \frac{k^2 - 1}{n^2 + kn} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right) \cdot \frac{k - kn^3 - n^4 + n}{1 - k^2} - \frac{1}{n},$$

kde $k > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, je n -tým členem posloupnosti $(a_n)_{n=2}^{\infty}$.

- Dokažte, že $a_n = n + 1$ pro každé $n > 1$.
- Vypočtěte součet prvních n členů posloupnosti $(a_n)_{n=2}^{\infty}$.
- Najděte rekurentní vyjádření posloupnosti $(a_n)_{n=2}^{\infty}$.

 6. Úloha z tématu *Planimetrie*:

Dopravní značka STOP má tvar pravidelného osmiúhelníku vepsaného do kruhu o poloměru 64 cm. Stroj vysekává značky z pásu plechu, jehož šířka je rovna výšce značky.

- Vypočtěte obsah značky.
- Vypočtěte minimální délku pásu plechu potřebnou na výrobu 30 značek.

- c) Kolik procent tvoří odpad při výrobě 30 značek z pásu plechu?

7. Úloha z tématu *Stereometrie*:

Do krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a je vepsán čtyřboký jehlan $PQRSV$ tak, že jeho hlavní vrchol V je středem stěny $EFGH$ a vrcholy P, Q, R, S podstavy jsou po řadě středy hran AB, BC, CD, DA . Určete plášť jehlan $PQRSV$.

8. Úloha z tématu *Analytická geometrie*:

V rovině je dána přímka

$$p : 3x - 2y - 26 = 0$$

a kruh

$$K : x^2 + y^2 + 6x - 4y \leq 39.$$

- a) Ukažte, že přímka p a kruh K nemají společný bod.
 b) Najděte bod přímky p , který má od kruhu K nejmenší vzdálenost.
 c) Najděte bod kruhu K , který má od přímky p nejmenší vzdálenost.

9. Úloha z tématu *Kombinatorika – pravděpodobnost – statistika*:

Pan Novák založil podnik s 50 zaměstnanci. Vedoucí místa obsadil svými příbuznými nebo kamarády a přiznal jim vysoké platy. Rozdělení četností měsíčních platů ukazuje následující tabulka:

Platy v tisících Kč	9	12	16	25	35	45
Počet zaměstnanců	26	9	5	2	5	3

- a) Sestrojte diagram rozdělení četností platů zaměstnanců podniku.

- b) Vypočtete aritmetický průměr a medián platů zaměstnanců podniku.
- c) Porovnejte aritmetický průměr a medián a rozhodněte, která z obou charakteristik lépe vystihuje platovou situaci v podniku.

(Autory jednotlivých úloh jsou v tomto pořadí J. Černý, S. Krčková, J. Houska, V. Sýkora, J. Černý, J. Černý, J. Herman – J. Šimša, J. Herman – J. Šimša, V. Sýkora.)

Literatura

- [1] Sýkora, V. a kol., *Katalog požadavků ke společné části maturitní zkoušky z matematik v roce 2004*, Cermat, MŠMT, Praha, 2000.
- [2] Sýkora, V. a kol., *Sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky z matematiky, základní obtížnost*, Tauris, Praha, 2001
- [3] Sýkora, V. a kol., *Sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky z matematiky, vyšší obtížnost*, Tauris, Praha, 2001
- [4] Zhouf, J. a kol., *Sbírka úloh z matematiky pro státní část maturitní zkoušky*, Prometheus, Praha, v tisku.

RNDr. Václav Sýkora, CSc.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky UK Praha

M. D. Rettigové 5, 116 39 Praha 1

e-mail: Vaclav.Sykora@pedf.cuni.cz

RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky UK Praha

M. D. Rettigové 5, 116 39 Praha 1

e-mail: jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz