Jaromír Šimša

Jednotné důkazy „kvadratických“ vět o trojúhelníku

Učitel matematiky, Vol. 11 (2003), No. 1, 11–15

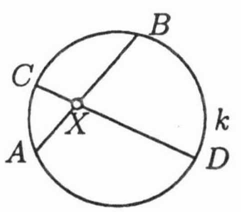
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150790

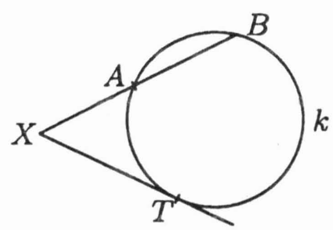
JEDNOTNÉ DŮKAZY „KVADRATICKÝCH" VĚT O TROJÚHELNÍKU

JAROMÍR ŠIMŠA

V tomto příspěvku ukážeme, že Pythagorova věta a Eukleidovy věty o výšce a o odvěsně pravoúhlého trojúhelníku jsou, stejně jako kosinová věta pro obecný trojúhelník, bezprostředními důsledky *věty o mocnosti bodu ke kružnici*, která patří k běžnému planimetrickému učivu čtyřletých gymnázií (viz [3], str. 81–84). Příslušné důkazy podáme ve formě obrázků, které prakticky nepotřebují žádný doplňující výklad nebo vysvětlení. Pro takový druh argumentace pomocí geometrických obrázků, schémat nebo diagramů se v amerických časopisech pro popularizaci matematiky vžilo označení *důkaz beze slov* (viz [1] a [2], odkud je také převzat níže uvedený důkaz kosinové věty).

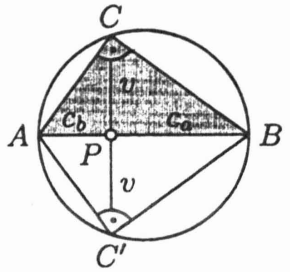
Zmíněnou větu „o mocnosti" nejdříve připomeňme dvěma obrázky. Na levém z nich je bod X průsečík libovolných dvou tětiv AB a CD kružnice k, zatímco na pravém obrázku je bod X průsečík prodloužené tětivy AB kružnice k a její tečny s bodem dotyku T.

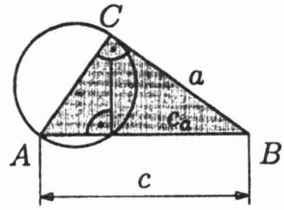




$|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD|$ $\qquad$ $|XT|^2 = |XA| \cdot |XB|$

Na dalším obrázku vlevo vidíte důkaz Eukleidovy věty o výšce pravoúhlého trojúhelníku (pomocí mocnosti její paty k Thaletově kružnici nad přeponou). Obrázek vpravo dokazuje Eukleidovu větu o odvěsně (pomocí Thaletovy kružnice nad druhou odvěsnou trojúhelníku). Oba obrázky také najdete ve cvičeních z učebnice [3].

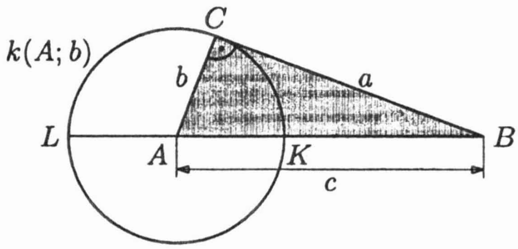




$$|PC| \cdot |PC'| = |PB| \cdot |PA| \qquad |BC|^2 = |BP| \cdot |BA|$$

$$v^2 = c_a \cdot c_b \qquad a^2 = c_a \cdot c$$

K důkazu Pythagorovy věty využijeme podle následujícího obrázku kružnici, která má střed v jednom z krajních bodů přepony zkoumaného pravoúhlého trojúhelníku a dotýká se jeho protilehlé odvěsny.

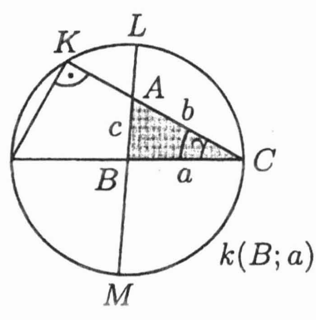


$$|BC|^2 = |BK| \cdot |BL|$$

$$a^2 = (c-b)(c+b)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

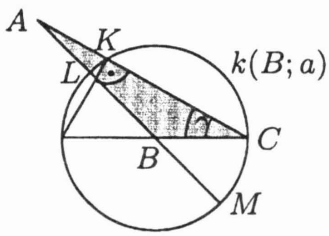
Přejdeme nyní k důkazu kosinové věty, při kterém využijeme obvyklé označení stran a úhlů obecného trojúhelníku. Rovnost $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ dokážeme nejprve obrázkem v situaci, kdy je splněna podmínka $2a\cos\gamma > b$:



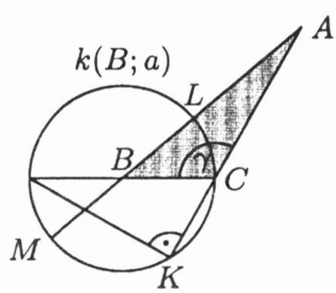
$$
\begin{aligned}
|CK| &= 2a\cos\gamma \\
|AL|\cdot|AM| &= |AC|\cdot|AK| \\
(a-c)(a+c) &= b(2a\cos\gamma - b) \\
c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\gamma
\end{aligned}
$$

Také v ostatních dvou případech, které vidíte na následující dvojici obrázků, můžeme vztah $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ odvodit z rovnosti součinů $|AL|\cdot|AM|$ a $|AC|\cdot|AK|$; přesvědčete se o tom sami.

Případ $b \geq 2a\cos\gamma \geq 0$:



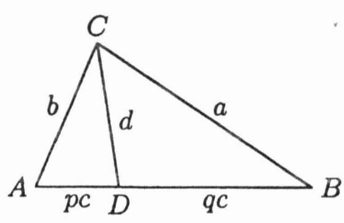
Případ $\cos\gamma < 0$:

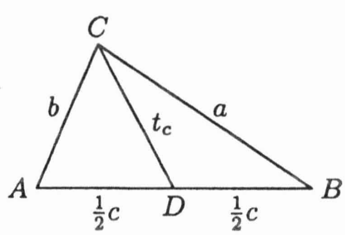


Méně známou poučkou, ve které vystupují „kvadráty“ vzdáleností bodů obecného trojúhelníku, je tzv. *Stewartův vzorec*:

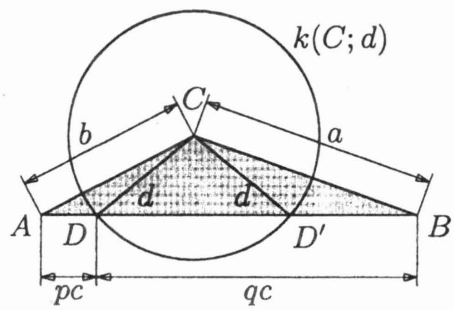
$$d^2 = pa^2 + qb^2 - pqc^2 \tag{S}$$

pro délku CD příčky CD trojúhelníku ABC, kde D je libovolný bod strany AB. Písmena a, b, c ve vzorci (S) značí jako obvykle délky stran trojúhelníku a koeficienty p, q ($p, q \geq 0$, $p+q = 1$) jsou čísla určená rovnostmi $|AD| = pc$ a $|BD| = qc$. (Pro $p = q = 1/2$ plyne z (S) vzorec $t_c^2 = (a^2+b^2)/2 - c^2/4$.)





Stewartův vzorec (S) odvodíme z mocností vrcholů A, B ke kružnici k, která má střed ve vrcholu C a poloměr $d = |CD|$. Označme D' druhý průsečík kružnice k s přímkou AB (jde-li o tečnu, položíme $D' = D$) a proveďme důkaz pro případ, kdy bod D' leží mezi body A a B (sami promyslete, co se v následujícím důkazu změní, padne-li bod D' vně úsečky AB).

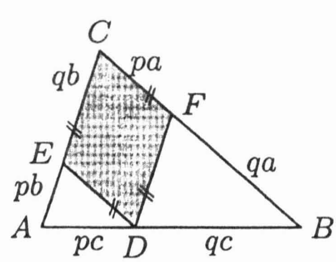


$$b^2 - d^2 = |AD| \cdot |AD'| = pc \cdot |AD'|$$
$$a^2 - d^2 = |BD| \cdot |BD'| = qc \cdot |BD'|$$

Sečteme-li q-násobek první rovnice s p-násobkem rovnice druhé, dostaneme:

$$q(b^2 - d^2) + p(a^2 - d^2) = pqc\,(|AD'| + |BD'|)\,,$$
$$pa^2 + qb^2 - (p+q)d^2 = pqc^2,$$
$$d^2 = pa^2 + qb^2 - pqc^2.$$

K dokázanému vzorci (S) dodejme ještě jednu zajímavost. Zvolíme-li podle daného bodu $D \in AB$ body $E \in AC$ a $F \in BC$ tak, aby čtyřúhelník $CEDF$ byl rovnoběžník, budou trojúhelníky ABC, ADE, DBF podobné a úsečky na hranici trojúhelníku ABC budou mít délky uvedené na následujícím obrázku.



Pomocí délek z posledního obrázku můžeme Stewartův vzorec zapsat ve tvaru

$$|CD|^2 = |CF| \cdot |CB| + |CE| \cdot |CA| - |DA| \cdot |DB|.$$

Všechny tři součiny napravo můžeme interpretovat jako mocnosti a Stewartův vzorec vyjádřit rovností

$$|CD|^2 = \mathcal{M}(C; k_{DBF}) + \mathcal{M}(C; k_{ADE}) + \mathcal{M}(D; k_{ABC}), \qquad \text{(S')}$$

kde $\mathcal{M}(X; k_{PQR})$ značí mocnost bodu X ke kružnici opsané trojúhelníku PQR. Věříme, že obsah tohoto příspěvku pomůže čtenářům–učitelům zpestřit výuku tématu o mocnosti bodu ke kružnici, ke kterému dostupné učebnice a sbírky přinášejí poměrně málo rozmanitých námětů. K důkazům beze slov pro jiné partie školské matematiky se v budoucích číslech „Učitele" určitě vrátíme.

Literatura

[1] Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of Amerika, Washington, DC, 1993

[2] Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words. More Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of Amerika, Washington, DC, 2000

[3] Pomykalová, E., *Planimetrie*, Matematika pro gymnázia, Prometheus, Praha, 1993

Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.
Katedra matematiky PřF MU Brno
Janáčkovo nám. 2a, 602 00 Brno
e-mail: simsa@math.muni.cz