Učitel matematiky

Roman Hašek

Česká lokalizace programu Derive 6

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 4, 204–217

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150780`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2005

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

ČESKÁ LOKALIZACE PROGRAMU DERIVE 6

ROMAN HAŠEK

Na podzim roku 2004 vydala firma Texas Instruments verzi 6.1 programu Derive. Tato událost je pro nás zajímavá tím, že program Derive byl poprvé vydán také v české lokalizaci. Tím se čeština stala, vedle angličtiny, němčiny, francouzštiny, španělštiny, italštiny, holandštiny, maďarštiny a slovenštiny, již devátým jazykem, v němž je program Derive uživatelům nabízen. Derive je program typu CAS (computer algebra system), v němž je možno provádět symbolické i numerické výpočty a kreslit dvourozměrné i třírozměrné grafy. Při výpočtech má uživatel k dispozici velké množství matematických funkcí, případně si může programovat funkce vlastní. Historie programu Derive začíná rokem 1979, v němž byl vydán jeho předchůdce, program muMATH. První verze programu Derive byla vydána v roce 1988, první verze pro Windows pak v roce 1996. „Dosovská“ verze programu se stala na dlouhou dobu populární pro nezvyklou kombinaci malé velikosti a velké výpočetní síly. V současné době je program využíván na řadě středních i vysokých škol v USA a v Evropě. V některých zemích je Derive oficiálním programem pro podporu výuky matematiky na školách (např. Rakousko a Slovensko).

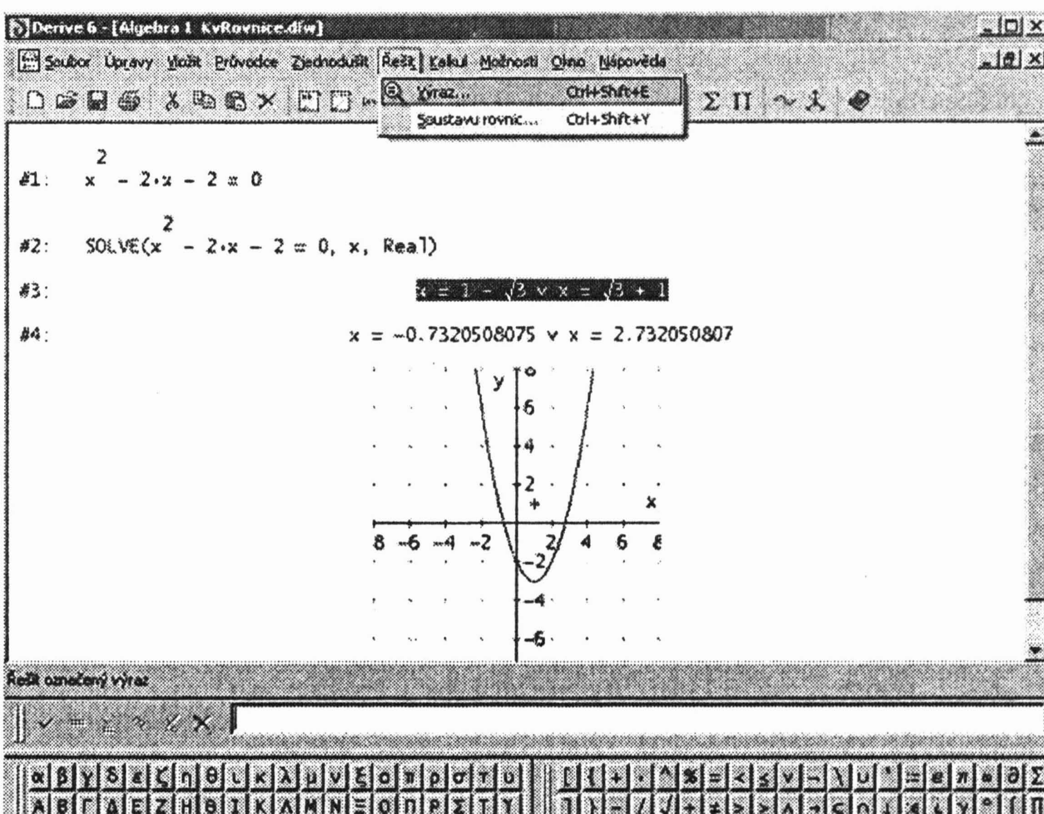
Pro využití na základních a středních školách předurčuje program Derive, dle mého názoru, především jednoduchost obsluhy a efektivita získávání výsledků. Program je totiž vybaven rozhraním, které nám umožňuje provádět většinu výpočtů na úrovni matematiky základní a střední školy bez znalosti potřebných příkazů. Program tak se svými příkazy ustupuje do pozadí – není třeba se je učit a uvolňuje místo řešenému problému. K výsledku, ať již v symbolické, numerické či grafické podobě, navíc vede ve většině případů jen velmi malý počet úkonů. Tyto klady nejsou kupodivu zastíněny cenou programu. Ta je pro školy velice příznivá.

Tento článek má za cíl představit program Derive 6 v jeho české verzi a na několika příkladech ilustrovat podstatu práce s programem a některé jeho zajímavé schopnosti. Ke čtení článku doporučuji stáhnutí časově omezené demonstrační verze programu Derive 6.1 na adrese http://derive.europeon.cz.

1. Úvod do programu

1.1. Rozhraní programu

S programem komunikujeme prostřednictvím rozhraní, které odpovídá standardu programů pracujících pod operačním systémem Windows (viz Obr. 1). Najdeme zde nabídku akcí (Obr. 1, druhý řádek), za nimiž se skrývají roletová menu s konkrétními příkazy. Ukážeme-li na příkaz myší, objeví se v dolní části okna jeho stručná charakteristika (Obr. 1, řádek pod velkou pracovní



Obr. 1: Rozhraní programu Derive 6

plochou). Nechybí ani ikony pro rychlé provádění některých příkazů (Obr. 1, třetí řádek). Najdeme zde i panely nástrojů pro rychlé vkládání písmen řecké abecedy či matematických symbolů. Podoba rozhraní se dá změnit (Okno → Přizpůsobit ...). Roli kompletní uživatelské příručky hraje nápověda programu, která je tradičně přístupná z nabídky Nápověda nebo klávesou (F1).

1.2. Vstup a výstup

Výrazy vkládáme do programu prostřednictvím příkazového (vstupního) řádku (Obr. 1, úzký bílý řádek v dolní části okna). Po napsání výrazu a stisknutí klávesy Enter (¢) nebo ikony $\boxed{\checkmark}$ (nalevo od příkazového řádku) se výraz objeví na pracovní ploše (okno Algebra), která celému oknu dominuje. Každý výraz na pracovní ploše má své číslo (např. #1), které slouží i jako proměnná, pomocí níž se můžeme na výraz odvolávat. Chceme-li například sečíst dva výrazy, které se na pracovní ploše vyskytují pod čísly #5 a #13, stačí na příkazový řádek napsat #5 + #13 = (¢). Často budeme potřebovat přecházet mezi příkazovým řádkem a pracovní plochou. Můžeme to řešit klikáním myší nebo použitím kláves (Esc) (nahoru) a (F2) (dolů).

1.3. Manipulace s výrazy

Po pracovní ploše se pohybujeme opět pomocí myši, nebo pomocí kláves $(^1/_2)(^1/_4)$. Zaznamenání historie naší práce na pracovní ploše nám může podstatně ušetřit čas. Potřebujeme-li vložit výraz, který na ploše již je, využijeme jeho číslo, jak je zmíněno výše, nebo si tento výraz najdeme a zvýrazníme kliknutím myší. Potom ho můžeme přenést na příkazový řádek tak jak je klávesou (F3) nebo uzavřený v závorce klávesou (F4). Při pohybu po pracovní ploše (myší nebo šipkovými klávesami) se zvýrazňují výrazy celé. Zvýraznění jenom části výrazu docílíme buď opakovaným klikáním myší umístěnou nad příslušnou částí výrazu (tato část musí mít sama o sobě smysl jako výraz), nebo pomocí kombinace kláves $(^1/_2)(^1/_4)$ (Æ)(æ) při současném držení klávesy (Shift). Výrazy můžeme po pracovní ploše přemisťovat (tj. měnit jejich pořadí) jednoduše uchopením myší a přetažením na požadované místo.

To, zda jim zůstane jejich původní číslo, nebo se změní dle nového pořadí, ovlivníme volbou Možnosti → Zobrazení → Přečíslovat výrazy. Čísla výrazů (označení) můžeme skrýt volbou Možnosti → Skrýt → Označení.

Při manipulaci s výrazy oceníme ikony $\boxed{\checkmark}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\underline{\checkmark}}$ $\boxed{\approx}$ $\boxed{\underline{\approx}}$ $\boxed{\times}$ vlevo od příkazového řádku. Jejich význam je v pořadí zleva doprava tento: zobrazit výraz na pracovní ploše, výraz zjednodušit a výsledek zobrazit na ploše, na ploše zobrazit výraz i výsledek jeho zjednodušení, výraz aproximovat, výraz zobrazit na ploše spolu s jeho aproximací. Ikony $\boxed{=}$, $\boxed{\approx}$ najdeme ještě na horní liště ikon nebo jim odpovídající akce můžeme vyvolat posloupnostmi příkazů Zjednodušit → Základní zjednodušení, Zjednodušit → Aproximovat... Chceme-li mít výraz i jeho zjednodušení na jednom řádku, napíšeme při vkládání za výraz znaménko = (rovná se) a odešleme stisknutím Enter (¢).

1.4. Tvorba dokumentů

Kromě výrazů a s nimi spojených výpočtů můžeme na pracovní ploše zobrazit text (Vložit → Text...), OLE (Object Linking and Embedding) objekty všech myslitelných aplikací (Vložit → OLE Objekt...) a samozřejmě grafy vytvořené samotným programem, jak vidíme na Obr. 1, (Vložit → 2D-graf..., Vložit → 3D-graf ...). Text můžeme běžným způsobem upravovat (řez, velikost, typ a barva písma, zarovnání, odrážky apod.) To nám umožňuje vytvářet v programu Derive kompletní dokumenty na úrovni textového editoru, například zadání samostatných prací, podklady pro vyučovací hodinu, vypracování laboratorní práce apod. Dokument můžeme uložit i ve formátu .rtf (Rich Text Format). Tak nejsme vázáni jenom na prostředí Derive, ale můžeme dokument otevřít a dále upravovat třeba ve Wordu, případně převést do formátu .pdf apod. Podobně je tomu i u grafů. Ty můžeme uložit v několika grafických formátech a pak je použít v dalších aplikacích.

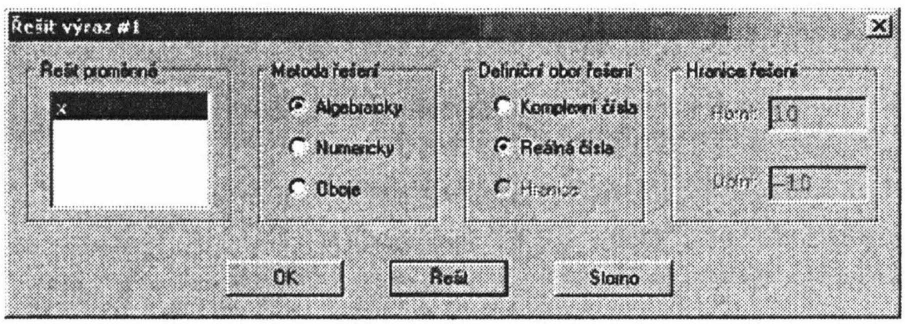
1.5. Příkazy

Zadání příkazu je v Derive chápáno jako zápis výrazu. Chceme--li, aby program zadaný příkaz vykonal, musíme jemu odpovídající výraz zjednodušit (tj. použijeme $\boxed{=}$ nebo Zjednodušit → Základní zjednodušení). Jak bylo naznačeno výše, program Derive podporuje dvojí způsob zadávání některých příkazů. Buď příkaz zadáme prostřednictvím dialogových oken programu nebo ho napíšeme na příkazový řádek. První možnost je pohodlnější a přibližuje program uživateli. Jak ukazuje následující příklad, nemusíme znát příslušné příkazy. Stačí z nabídky rozhraní vybrat požadovanou akci a program nás sám vede.

PŘÍKLAD 1: *V R řešte rovnici* $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Rovnici napíšeme na příkazovém řádku ve tvaru x^2-2x-3=0 a stisknutím (¢) odešleme na pracovní plochu.

V nabídce potvrdíme příkaz Řešit, v příslušném roletovém menu pak potvrdíme Výraz... (zkráceně Řešit → Výraz...). Otevře se následující dialogové okno



Obr. 2: Řešení rovnice

V něm zvolíme metodu řešení a definiční obor a potvrdíme tlačítko Řešit. Chceme-li znát výsledek i ve formě desetinného čísla (jako je na Obr. 1), jednoduše zvýrazníme na pracovní ploše výsledek algebraického řešení rovnice a stiskneme tlačítko $\boxed{\approx}$ (Aproximovat) na horní liště ikon.

Druhá možnost zadávání příkazů je rychlejší, pokud známe syntaxi příkazu, jinak ztrácíme čas jejím hledáním v nápovědě. Výše uvedenou rovnici jsme například mohli vyřešit zápisem příkazu SOLVE(x^2-2x-3=0,x,Real) na příkazovém řádku, jeho odesláním na pracovní plochu a následným zjednodušením. Někdy je tento způsob zadání příkazu jedinou cestou k získání výsledku. Nesmíme totiž zapomenout na to, že rozhraní pokrývá jenom část možností programu. Ten je mnohem mocnějším nástrojem, než by se zdálo při pouhém prozkoumání nabídky příkazů rozhraní. Řadu speciálnějších příkazů, například na řešení diferenciálních rovnic, počítání s čísly, zkoumání geometrických vztahů apod., prostě musíme na příkazový řádek napsat. Množství nabízených příkazů můžeme posoudit prostým prolistováním obsahu nápovědy (Nápověda → Témata nápovědy → Obsah). Jednou z takovýchto funkcí je funkce GCD(n_1, n_2, ..., n_k) pro nalezení největšího společného dělitele čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

PŘÍKLAD 2: *Určete největšího společného dělitele* 754 *a* 221.

Na příkazový řádek napíšeme příkaz GCD(754,221), odešleme ho na pracovní plochu a tam ho zjednodušíme ($\boxed{=}$ nebo Zjednodušit → Základní zjednodušení).

Kromě vestavěných funkcí pracuje program Derive se systémem balíčků funkcí (viz Nápověda → Témata nápovědy → Uživatelské balíčky matematických funkcí), což jsou soubory typu .mth (soubory obsahující funkce naprogramované přímo v Derive), které se automaticky načítají do paměti, jakmile je volána funkce v nich definovaná.

1.6. Programování

Derive obsahuje příkazy a funkce, které uživateli umožňují programovat si vlastní funkce. Ty ukládáme do souborů typu .mth a před použitím je musíme načíst do paměti (na rozdíl od vestavěných balíčků funkcí) příkazem Soubor → Importovat → Balíček funkcí... Některé příkazy programovacího jazyka Derive, formu zápisu programu a způsob jeho použití ilustruje následující jednoduchý příklad.

PŘÍKLAD 3: *Vytvořme program na určení přibližné hodnoty π pomocí obvodů n-úhelníků vepsaných a opsaných kružnici. Vstupním parametrem n programu bude počet desetinných míst, na která chceme určit hodnotu π. Na výstupu dostaneme informaci o počtu úhlů použitého pravidelného n-úhelníka a hodnoty příslušného dolního a horního odhadu π.*

Řešením je program OdhadPi(n):

```
        OdhadPi(n)
          Prog
            k:=5
            Precision := Approximate
            Loop
              d := k.SIN(π/k)
#1:           h := k.TAN(π/k)
              If FLOOR(d.10^n) = FLOOR(h.10^n)
                Prog
                  DISPLAY(APPEND(STRING(k), "-úhelník"))
                  RETURN APPROX([d, h], 10)
              k := k + 1
#2: OdhadPi(2)
57-úhelník
#3:                   [3.14000234, 3.144777633]
#4: OdhadPi(4)
1187-úhelník
#5:                   [3.141588985, 3.141599989]
```

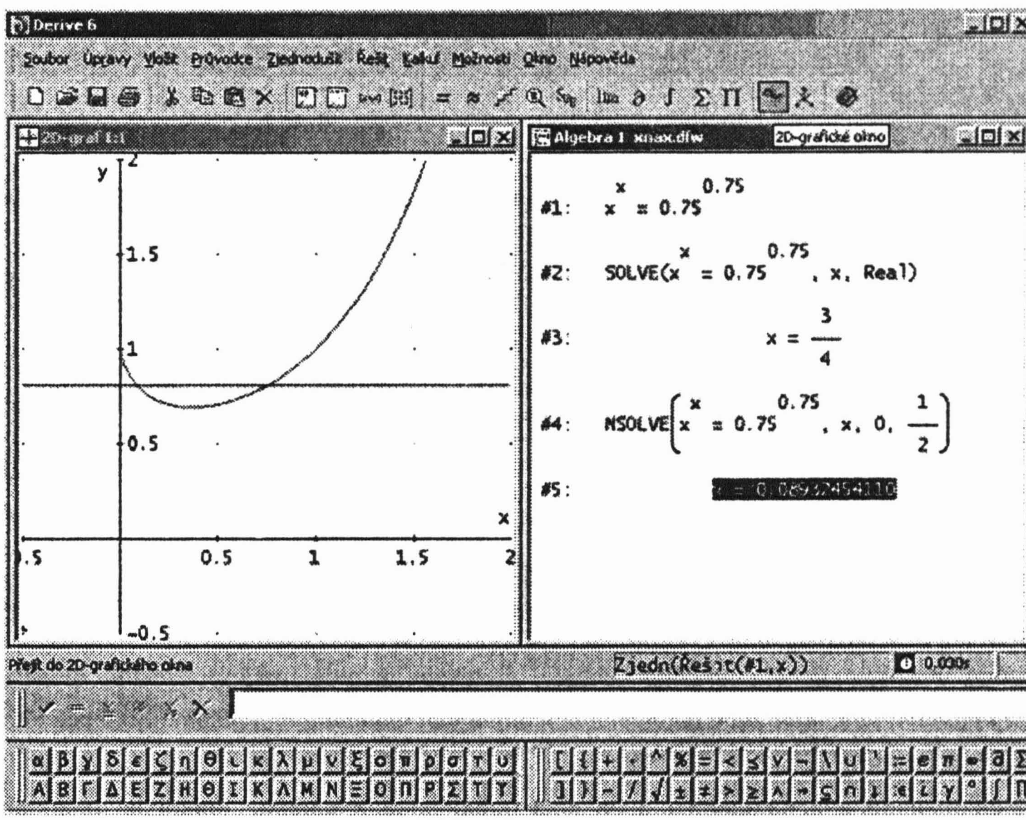
2. Několik úloh

Pojďme si na řešených úlohách ukázat některé zajímavé možnosti programu.

PŘÍKLAD 4: *Řešme v R rovnici* $x^x = 0.75^{0.75}$.

Rovnici můžeme nejprve řešit jako v příkladě 1. Dostaneme tak jedno řešení x =3/4 (viz Obr.3, řádky #2, #3). Nemá ale úloha více řešení? Odpověď na tuto otázku nám může pomoci najít grafické řešení dané rovnice. Postup je velice jednoduchý a intuitivní. V okně Algebra zvýrazníme levou (pravou) stranu rovnice a klikneme na ikonu . Tím se otevře 2-D grafické okno. Okna obvyklým způsobem uspořádáme, třeba vedle sebe (viz Obr. 3).

Při aktivním 2-D grafickém okně (má modrý horní pruh) a stále zvýrazněné levé (pravé) straně rovnice v okně Algebra klikneme opět na ikonu v (tentokrát je umístěna více vlevo). Tak dostaneme grafické řešení rovnice (viz Obr. 3), ze kterého vidíme, že úloha má řešení dvě. Druhé řešení pak najdeme numericky (Obr. 2), při volbě hranic 0 a 1/2 (Obr. 3, #4, #5).

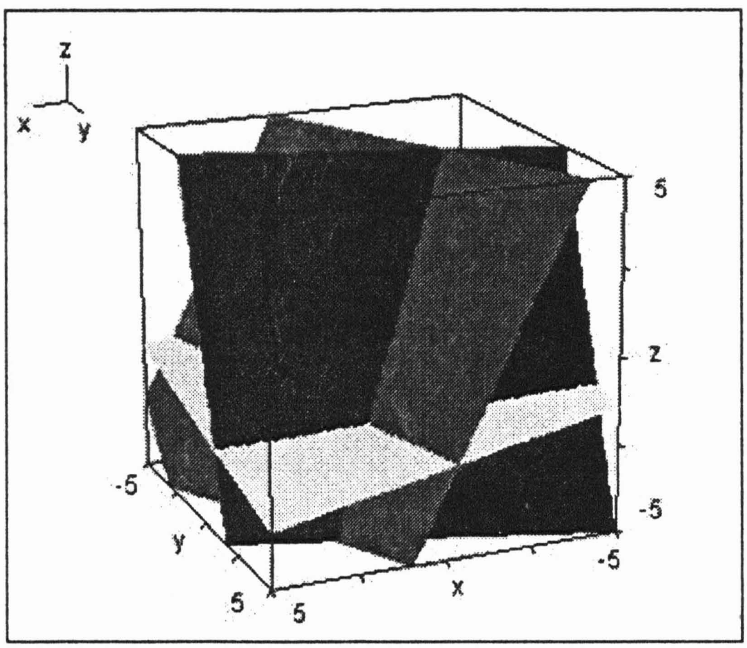


Obr. 3: Grafické a numerické řešení rovnice

PŘÍKLAD 5: *Řešte v R soustavu lineárních rovnic*

$$
\begin{aligned}
x + 3y + z &= 5 \\
2x + y + z &= 2 \\
x + y + 5z &= -7
\end{aligned}
$$

Rovnice nemusíme zadávat na pracovní plochu. Rovnou potvrdíme posloupnost příkazů Řešit → Soustavu rovnic... Pomocí dialogových oken (první se ptá na počet rovnic) nás program dovede až k řešení. V případě soustavy rovnic o třech neznámých můžeme algebraické řešení velice snadno a rychle doplnit obrázkem. Stačí postupně zvýrazňovat rovnice, které se po potvrzení tlačítka Řešit v příslušném dialogovém okně objevily na pracovní ploše jako parametry příkazu SOLVE a analogicky s tvorbou 2-D grafu v řešení předchozího příkladu (akorát místo ikony použijeme) je zobrazovat v 3-D grafickém okně (Obr. 4).



Obr. 4: Grafické řešení soustavy rovnic

V programu Derive jsou k dispozici, mimo rámec grafického rozhraní, mnohé další příkazy použitelné při zkoumání soustav lineárních rovnic. Zájemce odkazuji na Nápovědu, konkrétně na témata: Témata nápovědy → Vybraná témata → Řešení rovnic, Vektory a matice; Témata nápovědy → Knihovna funkcí → Řešení rovnic, Lineární algebra; Témata nápovědy → Uživatelské balíčky matematických funkcí.

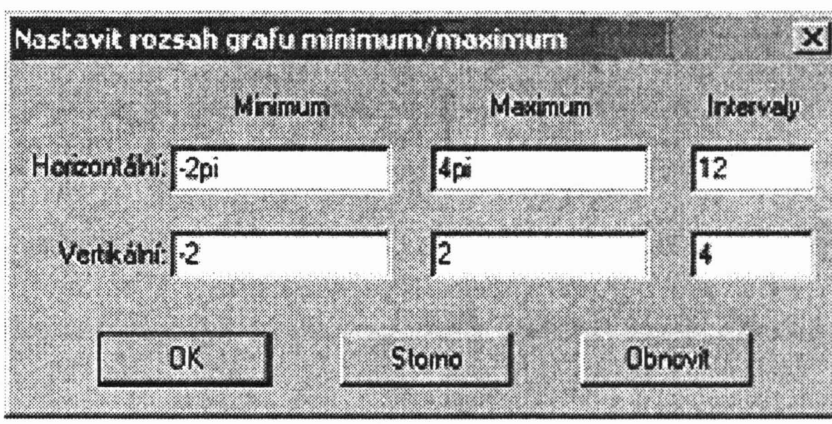
Do grafického okna můžeme vložit nástroj zvaný posuvník, který nám umožňuje zobrazovat funkce s jedním nebo i více parametry.

PŘÍKLAD 6: *Vyšetřete vliv hodnot parametrů a, b na průběh funkce dané předpisem*

$$y = \sin(ax + b).$$

Nejprve si na funkci $y = \sin x$ ukažme, jak získáme podobu osového kříže obvyklou pro znázorňování goniometrických funkcí, tj. na vodorovné ose jsou násobky π.

Při aktivním 2-D grafickém okně otevřeme dialogové okno příkazu Nastavení → Rozsah grafu → Minimum/maximum..., které vyplníme třeba takto:



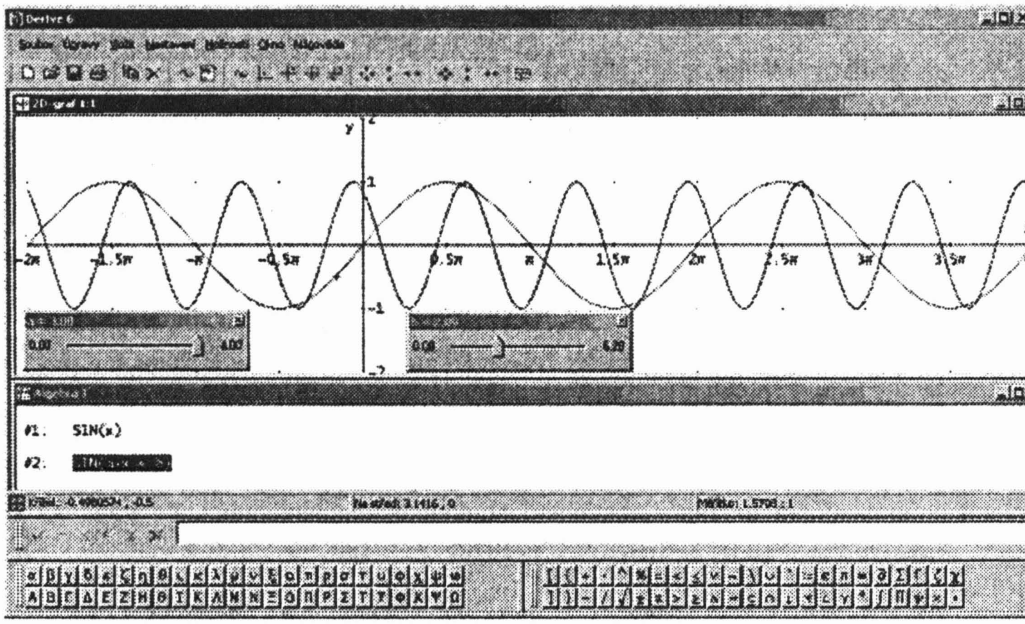
Obr. 5: Rozsah grafu

Potom na kartě Možnosti → Zobrazení... → Osy vepíšeme do pole Vodorovné násobky: hodnotu pi (napíšeme slovo „pi“ nebo použijeme panel mat. symbolů). Po zobrazení funkce $\sin(x)$ dostaneme graf základní sinusoidy (viz Obr. 6).

Vliv hodnot parametrů a, b na průběh grafu funkce

$$y = \sin(ax + b)$$

nyní můžeme vyšetřit tak, že do 2-D grafického okna se základní sinusoidou vložíme dva posuvníky (při aktivním grafickém okně volíme Vložit → Posuvník...), jeden pro parametr a, druhý pro b. Po zobrazení funkce $\sin(ax+b)$ měníme pomocí posuvníků hodnoty parametrů, příslušné grafy se zobrazují do 2-D grafického okna a my je můžeme porovnávat se základní sinusoidou (Obr. 6).



Obr. 6: Graf harmonické funkce

Pojem funkce je v programu chápán obecněji než jako reálná funkce reálné proměnné. Tak nám příkaz definice funkce umožňuje realizovat například funkce pro výpočet vztahů geometrických objektů.

PŘÍKLAD 7: *Napište v Derive funkci pro výpočet vzdálenosti dvou mimoběžek, z nichž každá je určena bodem a směrovým vektorem.*

Funkci nazveme VM, bude mít syntaxi VM(A,u,B,v) a pro její definici využijeme vzorec,

$$\mathrm{VM(A,u,B,v)} = v = \frac{\left|\vec{AB}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|},$$

kde v je vzdálenost dvou mimoběžek, z nichž jedna je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$, zatímco druhá je dána bodem B a směrovým vektorem $\vec{v}$.

Než budeme funkci definovat, je dobré deklarovat použité proměnné A, B, u, v jako vektory (Průvodce → Definiční obor proměnné...). Pro zápis absolutní hodnoty reálného čísla (v čitateli zlomku) i normy vektoru (ve jmenovateli) použijeme funkci ABS(). Na příkazovém řádku definujeme funkci VM takto:

VM(A, u, B, v) := ABS((A - B)·CROSS(u, v))/ABS(CROSS(u, v))

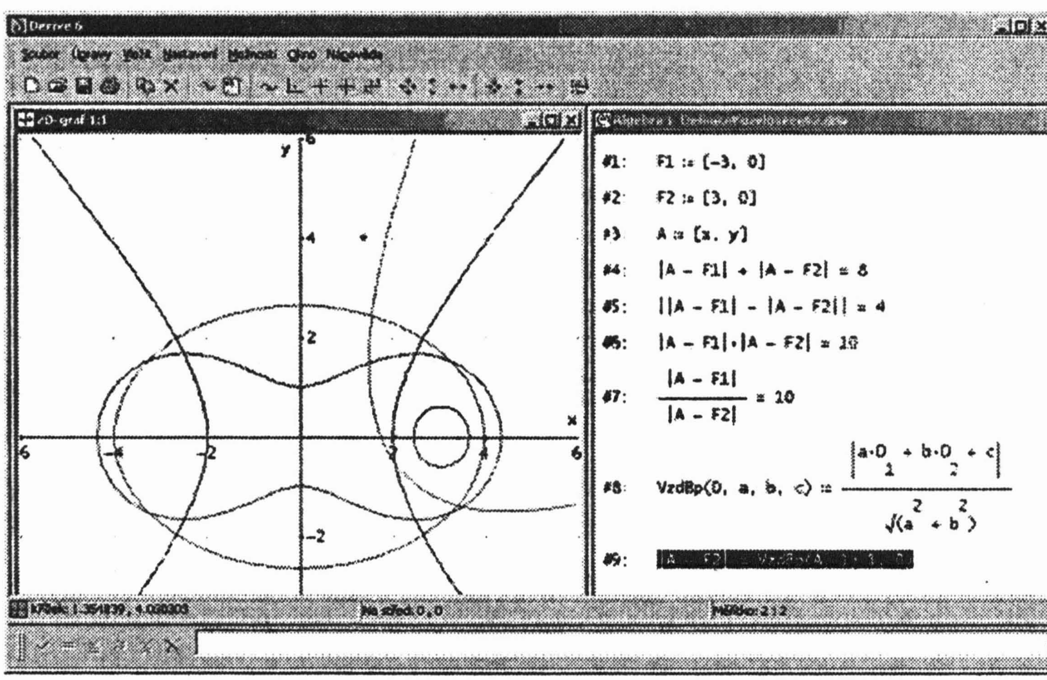
Na pracovní ploše dostaneme:

#1:	A:ϵ Vector
#2:	B:ϵ Vector
#3:	u:ϵ Vector
#4:	v:ϵ Vector
#5:	VM(A,u,B,v) := $\frac{\lvert(A-B).CROSS(u,v)\rvert}{\lvert CROSS(u,v)\rvert}$
#6:	VM([0,0,0], [1,0,0], [0,5,0], [0,0,5]) = 5

Při setkání s definicí elipsy jako množiny bodů, které mají od dvou daných různých bodů konstantní součet vzdáleností, se nabízí otázka, co dostaneme za množinu, když místo součtu uvažujeme rozdíl, součin či podíl. Jak ilustruje následující příklad, program Derive umožňuje studentovi snadno získat představu o podobě těchto množin ještě dříve, než se pustí do analytického řešení úlohy. Vizuální vyšetření zmíněných množin provedeme bez znalosti jakéhokoliv příkazu. Postupem uvedeným v řešení Příkladu 4 zobrazíme v 2D-grafickém okně definiční vztahy, které jsou uvedeny v okně Algebra v pravé polovině Obr. 7. Pro úplnost jsem ještě přidal definici paraboly pomocí ohniska a řídící přímky. Aby mohla být zapsána odpovídajícím vztahem (Obr. 7, řádek #9), definoval jsem funkci VzdBp(D,a,b,c) (Obr. 7, řádek #8) pro výpočet vzdálenosti bodu D od přímky $ax + by + c = 0$.

PŘÍKLAD 8: *V rovině jsou dány dva pevné body* F1, F2. *Vyšetřete množinu všech bodů, pro které je součet (rozdíl, součin, podíl, ...) jejich vzdáleností od těchto dvou bodů konstantní. Vyšetřete rovněž množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od pevně daného bodu* F2 *a přímky p:* $ax + by + c = 0$.

Postup řešení je patrný z níže uvedeného obrázku 7. Nejprve definujeme dva pevné různé body v rovině F1, F2 (řádky #1, #2) a obecný bod roviny A (#3). Potom zapíšeme definiční vztahy jednotlivých množin. Forma zápisu je stejná jako v psaném či tištěném textu. Pro zápis vzdálenosti dvou bodů X, Y používáme funkci ABS(X-Y), kterou je možno zadat ve tvaru |X-Y|. Každý z těchto vztahů pak po jeho zvýraznění zobrazíme v 2D-grafickém okně.



Obr. 7: Křivky v rovině

2. Závěr

Domnívám se, že program Derive je vhodný pro použití na základních i středních školách jako nástroj podpory výuky matematiky a fyziky. Je však třeba mít na paměti, že je to jenom nástroj, který má vedle vynikajících vlastností i své nedostatky a omezení.

Další informace o programu Derive a jeho využití je možno najít na těchto www stránkách:

- www.derive.com
- www.derive-europe.com
- www.pf.jcu.cz/p-mat
- derive.europeon.cz
- www.austromath.at/dug/
- www.jiscmail.ac.uk/lists/derive-news.html

Literatura

[1] Kutzler, B., Kokol-Voljc, V., *Derive 6, Pokročilá matematika pro vaše PC*, překlad příručky programu, České Budějovice, 2004.

[2] Kutzler, B., CAS as pedagogical tools for teaching and learning mathematics, *Department of mathematics report series* Vol. 11, University of South Bohemia, 2003, 89–103.

Mgr. Roman Hašek, Ph.D.
Katedra matematiky PF JČU,
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: hasek@pf.jcu.cz