Alena Kopáčková

Podpora funkčního myšlení žáků (2)

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 4, 193–203

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150778

PODPORA FUNKČNÍHO MYŠLENÍ ŽÁKŮ (2)

ALENA KOPÁČKOVÁ

Dokončení z minulého čísla

Výsledky průzkumné sondy

Experimentu se zúčastnilo celkem 142 žáků; z toho úlohu I řešilo 66 a úlohu II 76 žáků. Všichni ze zúčastněných žáků se již ve škole alespoň jednou setkali s definicí pojmu funkce. V každé ze školních tříd, s nimiž jsme pracovali, byla jedné polovině žáků předložena úloha I a druhé polovině žáků úloha II tak, aby žáci sedící ve stejné lavici neřešili tutéž úlohu a aby se omezila možnost jejich vzájemného ovlivňování. Úlohy byly vždy zadávány v rámci jedné vyučovací hodiny matematiky a žákům bylo na práci ponecháno tolik času, kolik sami potřebovali (zpravidla asi 30 minut). Správně vyřešit všechny úkoly zadané úlohy I či II se podařilo jen několika žákům; výjimečné to bylo zejména u žáků základní školy a kvart. Některé z výsledků zde popíšeme. Charakter obou úloh (společný fenomén vlastností definovaných po částech) i podobnost zadání nám umožňují část závěrů shrnout dohromady.

Graf závislosti

V úloze o povinném ručení zkonstruovalo graf funkce správně 23.7% žáků (z toho 13.3% žáků základní školy, kvart a kvint a 30.4% žáků druhých a třetích ročníků čtyřletého gymnázia), v úloze o dani z příjmu byla úspěšnost vyšší; graf mělo správně 43.9% všech zúčastněných (z toho 30.0% žáků ve věku 15–16 let a 55.6% gymnazistů ve věku 17–18 let).

Při konstrukci grafu se jako obtížné pro mnoho žáků ukázalo již první rozhodnutí, jak umístit souřadnicový systém na ploše papíru a jaká zvolit měřítka na jednotlivých osách. Někteří z žáků na náš závěrečný dotaz po tom, co se jim zdálo při řešení nejtěžší, přímo odpovídali „**volba měřítka**". Povaha definičního oboru i oboru hodnot (velikost čísel i rozdílnost hodnot v obou oborech) vyžadovala volit spíše různá měřítka na jednotlivých osách a experiment ukázal, že žáci nejsou příliš zvyklí pracovat s reálnými daty a velkými čísly. Žákům mnoho nepomohly milimetrový papír ani naše nápověda v bodě 1) obou úloh.

Při konstrukci grafů v obou úlohách se ukázalo, že žáci mají při řešení úloh **tendenci ke stereotypu** a snaží se zpravidla opírat o známé modely funkcí. Projevovalo se to tak, že i při několika správně zakreslených bodech $[x,\ f(x)]$ v souřadném systému se žáci často pokoušeli těmito body proložit nějakou (často jim známou křivku), i když dané úloze neodpovídala. Tito žáci ignorovali skutečnost, že jejich závislost je na daném definičním oboru popsána více funkčními předpisy, a předpokládali, že náhodně získané body $[x,\ f(x)]$ vyhovují jedinému společnému předpisu.

Při konstrukci grafu v úloze o povinném ručení se zásadní překážkou jevila **nespojitost** a **skok funkce** v bodech nespojitosti; mnozí žáci zkonstruovali správně několik úseček rovnoběžných s osou x, ale nesprávně je spojovali, ať už pomocí svislých spojnic tak, že vznikaly „schody", nebo byly tyto úsečky propojeny velmi násilně pomocí náhodně zvolené hladké křivky.

Mnozí žáci neporozuměli formulacím v **zadání úloh** a měli potíže i s běžnými českými slovy, jako jsou *včetně* v úloze I či vazba *„ze základu přesahujícího"* v úloze II. Toto **neporozumění** se projevilo jako zásadní překážka při konstrukci grafu zejména v úloze o dani z příjmu, kde žáci často funkční hodnotu pro zvolený daňový základ uvnitř pásma neskládali ze dvou částek (fixní a pohyblivé odpovídající daným procentům z rozdílu základů), ale počítali přímo příslušnou procentní část. Problémy žákům činilo také určit daň ze základu na hranici daňových pásem, pro tento základ jim totiž nesprávně vycházely dvě funkční hodnoty a výsledným grafem byla pak chybně nespojitá funkce po částech lineární, kde v bodech skoků nebylo jasně vyznačeno, která ze dvou potenciálních funkčních hodnot platí. Žáky zaskočila i jistá atypičnost prvního řádku zadávací tabulky (při srovnání s jejími ostatními řádky), a proto tak někdy jejich graf „začínal" až od daňového základu 102 000 Kč. Nepochopení tabulky na výpočet daně se objevovalo i přesto, že jsme ve většině tříd předvedli vzorový výpočet daně z daňového základu nacházejícího se uvnitř pásma. Další překážkou bránící správnému sestrojení grafu bylo to, že se v úloze pracovalo s procenty; některým žákům (zejména základní školy) zabralo jejich počítání množství času – svědčily o tom rozsáhlé výpočty (nejčastěji trojčlenkou) v některých žákovských pracích. Zjistili jsme ale také, že někteří žáci pochopili, že pro konstrukci grafu nebylo vůbec nutné s výjimkou posledního neomezeného pásma pro daňový základ s procenty počítat a že stačilo sestrojit body zlomu pomocí hodnot z tabulky; na některých grafech bylo patrné, že více bodů než tyto zlomové sestrojováno nebylo. Tento postup vyžadoval od žáků hlubší vhled do situace, určitou intuici a schopnost si graf představit a zřejmě i minimální zkušenost s podobnými grafy funkcí.[1]

Doplňkové úkoly úloh I, II

Bylo zřejmé, že čím správnější graf byl, tím pravděpodobněji se žák, který jej zkonstruoval, rozhodl řešit doplňkové úkoly 2-5, resp. 2-6. Někteří méně úspěšní žáci byli po analýze zadání a konstrukci grafu natolik vyčerpáni, že na řešení dalších úkolů již neměli sílu a rezignovali na ně. Pro některé z nich již sám nestandardní graf byl natolik novou a překvapující záležitostí, že k našim dotazům již neměli potřebu cokoliv říci. Pokud žáci na doplňkové úkoly vůbec reagovali, šlo převážně o úkoly č. 2, 4 (příp. 6 u úlohy II). Při hodnocení žákovských prací jsme došli k závěru, že zejména pro žáky základní školy nebyly úkoly č. 3 a č. 5 vhodně zvoleny a formulovány. Bylo zřejmé, že pokyn č. 3 obou úloh nebyl pro žáky dostatečně jasný a jednoznačný; byl vnímán jako vágní a různě vysvětlován. Shrneme-li přístupy těch žáků, kteří přesto na úkol č. 3 reagovali, šlo v podstatě o dvě tendence: část z nich se snažila najít pojmenování svého grafu podle známých konkrétních modelů (přímá úměrnost – *„čím vyšší objem, tím víc se platí“*, lineární

[1] Často bylo však pro nás při rozboru žákovských prací těžké na tento myšlenkový postup žáka usoudit s absolutní jistotou, neboť žáci prováděli mnohé výpočty na kalkulačkách bez jakýchkoliv dalších poznámek a z grafu nebylo vždy možné poznat, pomocí kolika bodů byl sestrojen.

funkce, exponenciální funkce, hyperbola – a často se opravdu žákovské grafy těmto modelům také podobaly), část z nich na výzvu obsaženou v otázce reagovala rekapitulací názvu celého problému, např. *„graf závislosti pojistného na objemu válců"*. Na úkol č. 5 rezignovala naprostá většina žáků. Jako příčinu této rezignace vidíme malou zkušenost žáků s „nestandardními" grafy funkcí. V dalším se budeme věnovat již jen úkolům č. 2, 4, příp. 6 obou úloh.

Grafické řešení problémů – úkol 2

Cílem úkolu č. 2 v obou úlohách bylo **graficky řešit** popsaný problém. Šlo o to nalézt odpovídající hodnotu závisle proměnné při zadané hodnotě nezávisle proměnné (I-2b, c, d; II- 2b, ale i naopak, při dané hodnotě závisle proměnné nalézt argument (I, II-2a). Při hodnocení prací jsme sledovali schopnost žáků „číst graf" a řešení vyznačit na příslušné souřadné ose, přičemž jsme brali v úvahu všechny práce, v nichž se objevil jakýkoliv graf, tj. i ty práce, v nichž zkonstruovaný graf neodpovídal dané úloze. Rezignovali jsme tak sice na správnost řešení, ale na kompetence žáků, o něž nám v úkolu 2 šlo, jsme se mohli zaměřit. Ukázalo se zcela zřetelně, že pro žáky je snazší z grafu vyčíst funkční hodnotu pro danou hodnotu nezávisle proměnné než hledat vzor pro danou hodnotu závisle proměnné. Toto zjištění nás příliš nepřekvapilo a odpovídá našim předchozím zkušenostem. V obou úlohách se úkol č. 2 rozhodl řešit přibližně stejný počet žáků (z těch žáků, kteří zkonstruovali jakýkoliv graf funkce, to byla zhruba třetina), s úkolem 2a si nevědělo rady 40% žáků u úlohy I a asi 20% žáků u úlohy II.

Mnoho žáků bylo zaskočeno zejména úkolem I-2a, který nevede k pozitivnímu řešení, neboť pojistné 8000 Kč se nezaplatí při žádné kubatuře motoru. Očekávali jsme, že v těch pracích, v nichž byl graf závislosti zkonstruován správně, najdeme přímku $y = 8000$, která nemá s grafem žádný společný bod (a tedy pro žádnou hodnotu nezávisle proměnné se této částky nenabude). Byl-li tedy dán požadavek „na grafu vyznačte", za řešení bychom mohli považovat onu graf neprotínající přímku $y = 8000$, případně po doplnění poznámkou „nelze vyznačit“, „neprotíná“, „průsečík, řešení neexistuje“ apod. Bylo však vidět, že žáci nejsou příliš zvyklí na úlohy, které nemají řešení a na pozitivní výzvu „na grafu vyznačte“ automaticky očekávají také pozitivní odezvu (tj. že má být co vyznačit). I když jejich postup by mohl ke správnému závěru vést, nedovedou grafickou situaci správně interpretovat a jejich nejistota a chybné očekávání vedou k tomu, že svá řešení a závěry pak násilně pozitivnímu očekávání „přizpůsobí“.

Na grafických **řešeních** jsme sledovali také to, zda jsou **správně vyznačena**. Máme zkušenost, že žáci (ale i vysokoškolští studenti) nemají často jasno v tom, co se grafickým řešením (např. rovnice o jedné neznámé) vůbec rozumí. Zadáme-li např. úlohu *graficky řešit rovnici* $f(x) = g(x)$ pro neznámou x, žáci velmi často za její grafické řešení považují průsečík křivek $y = f(x)$, $y = g(x)$ (existuje-li) a nikoliv odpovídající hodnotu proměnné x vyznačenou na příslušné ose. Myslíme si, že toto neporozumění může být způsobeno nedostatečným chápáním křivky $y = f(x)$ jakožto grafické reprezentace funkce; celá úloha se pak redukuje na stereotyp hledání průsečíku bez hlubší interpretace této činnosti. Podobnou zkušenost máme s grafickým řešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, příp. s grafickým řešením nerovnic či jejich soustav. V našich dvou úlohách více než třetina žáků z těch, kteří zkonstruovali jakýkoliv graf závislosti, nevyznačila řešení správně (u úlohy I to bylo dokonce 44% žáků).

Představy žáků o grafu funkce – úkol 4

Úkol 4 obou úloh měl za cíl zjišťovat u žáků **úroveň** jejich **představ o pojmu funkce**, resp. o grafu funkce. Nikde ve formulaci úloh nebylo záměrně explicitně řečeno, že se jedná o funkci, z praktické interpretace problému (pro každý objem válců motoru se platí jedno pojistné, z každého daňového základu se platí jen jedna daň z příjmu) to však plyne. Při hodnocení úloh bylo vidět, že propojení s reálným světem u žáků nefunguje dokonale a že dostanou-li se při řešení praktického problému do světa matematiky, na praktický svět zapomenou a na výzvu ze světa matematiky se snaží často reagovat podle stereotypu naučeného v hodině matematiky. Navíc oblast daní a pojistného včetně své specifické terminologie je zejména žákům základní školy zřejmě příliš vzdálená. I při analýze tohoto úkolu jsme žákovské reakce posuzovali vždy ve vztahu ke konkrétnímu zkonstruovanému grafu, takže chybné reakce žáků mohly být v podstatě dvojího druhu: žáci označili graf funkce nesprávně jako „nefunkci" a graf „nefunkce" nesprávně jako funkci. Uveďme, že správně graf za funkci označilo 46.9% žáků u úlohy I a 58.1% žáků u úlohy II (z žáků, kteří zkonstruovali jakýkoliv graf), přičemž žáci 2. a 3. ročníků gymnázií byli vždy přibližně o 12% úspěšnější než respondenti 15-16letí. Některé z žákovských reakcí na úkol 4 uvedeme dále.

Hledání analytické formule – II – 6

Nejhorší výsledky jsme zaznamenali u úkolu č. 6 v úloze o dani z příjmu. Správnou formuli pro výši daně se podařilo sestavit jen 13% 17-18letých gymnazistů, ale žádnému žákovi ve věku 15-16 let (ať už ze základní školy či kvarty a kvinty gymnázia). Očekávali jsme, že ti žáci, kteří sestrojí správně graf, nebudou mít s tímto úkolem problém. Ukázalo se však, že i když žák z tabulky pochopil, jak pro zvolenou konkrétní hodnotu nezávisle proměnné spočítat funkční hodnotu, neznamenalo to ještě, že je schopen tento **postup zobecnit** a **formálně zapsat**. Největší překážkou pro žáky bylo převedení vazby „ze základu přesahujícího" na rozdíl proměnné a částky odpovídající dolní hranici pásma daňového základu. Pokud žák v úkolu č. 6 chyboval, jednalo se téměř vždy (se dvěma výjimkami) o tuto chybu: namísto správného vzorce $15\,300 + (x - 102\,000)\cdot 0,2$ se objevilo $15\,300 + 0,2\cdot x$, často s poznámkou $x \in (102\,000, 204\,000\rangle$. V některých případech bylo násobení desetinným číslem $0,2$ zapsáno zlomkem jako dělení číslem 5.

CITACE Z ŽÁKOVSKÝCH PRACÍ

Jsme názoru, že více než tabulka plná číselných údajů[2] vypoví o funkčním myšlení žáků příslušných věkových kategorií několik

[2]Podrobné tabulky absolutních i relativních četností vztažených ke všem úkolům úloh I, II máme k dispozici.

konkrétních citací. Předkládáme zde autentické žákovské argumentace – reakce na výzvu obsaženou v úkolu 4 obou úloh doplněné naším stručným komentářem. Použitá jména žáků nejsou skutečná, pohlaví žáka je respektováno. Jména žáků devátého ročníku základní školy začínají vždy písmenem A, u kvartánů písmenem B, u kvintánů C, žáků druhých ročníků gymnázia písmenem D a žáků třetích ročníků gymnázia písmenem E. Doslovné citace jsou v uvozovkách a označeny kurzívou.

Adam (úloha I) správně zařazuje svůj graf mezi funkce: *„Jde o graf funkce. Protože se zvyšujícím se objemem se zvyšuje počet peněz.“*. Adam si pojem funkce spojuje s velmi frekventovanou vlastností – monotonií a představu o pojmu funkce si buduje na základě typických vlastností prototypu.

Annin graf (úloha I) není grafem funkce (obsahuje chybně vertikální úsečky), ale **Anna** jej mezi funkce řadí: *„Jde o graf funkce, je graficky znázorněn.“* Anna povyšuje jeden z častých frekventovaných jevů souvisejících s pojmem funkce na podmínku pro pojem postačující. Dívka se zřejmě neměla příležitost setkat s funkcí, jejíž graf by nebylo možné sestrojit, a zřejmě ani s grafem relace, která není funkcí. Cokoliv, co je graficky znázorněno, je pro ni grafem funkce. Tento argument nebyl ojedinělý. Podobně uvažoval v úloze I např. **Eduard**, jenž zařazuje svůj správný graf mezi grafy funkcí slovy: *„Jde samozřejmě o graf fce. Každý graf se dá popsat funkcí.“*

Emanuel sice zkonstruoval v úloze I správný graf, ale domníval se, že se jedná o „nefunkci“: *„Nejde o graf funkce, protože graf je nespojitý a závislost pojistného na objemu nelze v tomto případě vyjádřit žádnou funkcí.“* Také Emanuel usuzuje na to, zda graf je či není grafem funkce, podle přítomnosti některé z typických vlastností, s nimiž se u modelů probíraných ve škole setkal. Zde je touto vlastností funkce (vnímanou jako vlastnost nutná) spojitost. Z dalšího je patrné, že žák pátrá ve své mysli v množině konkrétních modelů funkcí, když na otázku č. 5 odpovídá: *„Připomíná mi graf funkce, v níž se objevovaly celé hodnoty čísel.“*

Argumentace **Erika**, proč by jeho schodovitý graf (úloha I) obsahující i svislé úsečky neměl být grafem funkce *„Nevím, možná* *to není funkce, není zde žádná pravidelnost"*, ukazuje na to, že v jeho vědomí je graf funkce spjat s pravidelností a symetrií a že jednoznačnost závisle proměnné není dominující vlastností. Naše předchozí výzkumy tato zjištění potvrzují.

Cecílie u svého téměř správného grafu v úloze II (kde chybí pouze část odpovídající daňovému základu do 102 000 Kč) píše: *„Ano, jde o graf funkce, protože jsem se s tím už setkala v hodině M."* Žákyně na pojem funkce usuzuje podle podobnosti s nějakým konkrétním modelem, který již ze školy zná.

Eliška i **Evžen** zařazují správně své grafy v úloze II mezi funkce, pojem funkce je u nich budován na základě konkrétních modelů: *„Jde o graf exponenciál. fce."* (Eliška), *„Je to graf funkce; připomíná mi to celou hodnotu čísla."* (Evžen). Obě výpovědi svědčí o tom, že definice není pro tyto žáky podstatná, podstatné je to, zda „podobný" graf lze nalézt mezi konkrétními prototypy funkcí, mezi modely, které žák zná.

Jediný **Bedřich** v úloze I argumentoval prakticky a byl schopen propojit reálný svět se světem matematiky, když o svém správném grafu tvrdil: *„Ano, jde o graf funkce; neboť pro každé x (kubaturu válce) je jen jedno y (výše pojistného) – za jednu kubaturu nelze zaplatit dvě částky"*.

David v úloze II zcela zřetelně ukazuje, že je pro něj překážkou pojmotvorného procesu pojmu funkce fenomén vlastností definovaných po částech: *„Bereme-li graf jako celek, není grafem žádné funkce; rozložíme-li jej však na jednotlivé složky, je grafem spojeným z několika (resp. 4) grafů, které grafy funkce jsou."* Podobnou překážku je možné v téže úloze identifikovat i u **Drahomíra**: „*Ne* (pozn. nejde o graf funkce) , *protože každá část grafu se vypočítává jinak (pomocí jiných čísel)."*

Z mnohých žákovských argumentací (zejména v úloze I) vyplývá, že žáci vnímají definici pojmu funkce formálně. Požadavek, aby každé hodnotě nezávisle proměnné byla přiřazena právě jedna (popř. nejvýše jedna) hodnota závisle proměnné, je osvojen často bez jakékoliv představy a v mysli žáka je deformován. Správně zkonstruované grafy byly pak odmítány jako grafy funkce slovy: *Není fce – pro 1 y vychází n – x."* (**Daniel**) či: *„Není funkce,* *několika hodnotám x přísluší vždy 1 hodnota y.“* (**Eliáš**). Touto nesprávnou interpretací definice funkce nebyla tak odmítána nejednoznačnost závisle proměnné, ale konstantnost („nejednoznačnost“ nezávisle proměnné). **Božena**, která v úloze II zkonstruovala chybně graf po částech konstantní funkce, argumentuje podobně: *„Ano, jde o graf fce; protože nikdy nenabývá hodnota na x stejně.“*, ale konstantnost pro ni není překážkou. Formální vnímání role obou proměnných (a záměnu prostoty funkce s požadavkem jednoznačnosti závisle proměnné) prozrazuje i **Dana**, která v úloze II zkonstruovala zcela správný graf, který zařadila mezi funkce slovy: *„Jde o fci, jednomu y jen jedno x.“* Mnozí žáci (včetně gymnazistů z 2. a 3. ročníků) si obě proměnné pletli a zaměňovali osy souřadné, a to i při konstrukci grafu. Viděli jsme to např. u **Čestmíry**, u níž byla popsaná deformace „kompenzována“ ještě navíc velmi kuriózně neschopností „číst graf“, a tak graf skládající se z vertikálních úseček za funkci považuje: *„Jedná se o graf funkce, protože jedné hodnotě x odpovídá jedna hodnota y.“* Domníváme se, že i zde je příčinou formalismus a nedostatečné porozumění kartézské soustavě souřadnic jako nástroji umožňujícímu znázornit funkční závislost.

ZÁVĚR

Předložené dvě úlohy nejsou jedinými možnostmi, jak žákům v přirozeném kontextu přiblížit obtížné fenomény, jakými jsou konstantnost, nespojitost a zejména definování funkce po částech bez jednoho analytického vyjádření platného pro celý definiční obor. V reálném životě můžeme najít mnoho dalších situací, které jsou nositeli zmíněných fenoménů. Uveďme např. tarifní mzdu zaměstnance v závislosti na odpracovaných letech, poštovní sazby v závislosti na hmotnosti zásilky, výši parkovného za automobil v závislosti na době parkování, jízdné v autobuse či vlaku v závislosti na počtu ujetých kilometrů, různé další poplatky za služby, které se v závislosti na době poskytování služby, ale i na dalších parametrech nemění pouze lineárně, jako je např. půjčovné automobilu, sportovních potřeb apod. Řešení podobných úloh nevyžaduje složitý matematický aparát (stačí znalost lineární a konstantní funkce), a úlohy tak mohou být předkládány žákům jak na základní, tak i střední škole, ale je možné je využít i pro některé obory škol vysokých. Sami žáci a studenti by mohli být vyzýváni, aby podobné reálné situace aktivně hledali. Dovedeme si představit, že shromažďování podobných úloh s reálným kontextem by mohlo být i vhodným tématem seminárních, příp. diplomových prací pro studenty pedagogických fakult. Nedostupnost analytické formule platné pro celý definiční obor u těchto funkcí umožní učiteli vyzdvihnout před žáky výhody grafického znázornění závislosti i grafického řešení různých souvisejících problémů. Myslíme si, že práce s konkrétními příklady funkcí je jedinou cestou k vytváření správných představ o pojmu funkce a k posilování funkčního myšlení žáků všech věkových skupin. Také z historie matematiky máme poučení, že představy matematiků o pojmu funkce se rozšiřovaly a obohacovaly vždy po podnětech z reálného života a při řešení konkrétních problémů a že každému zobecnění představ o funkcích předcházela vždy důkladná práce s pestrým množstvím konkrétních modelů funkcí. Věříme, že častější předkládání slovně zadaných úloh s reálným kontextem může u žáků přispět nejen k většímu pochopení pojmu funkce a fenoménů s ním spojených i k upevňování jejich funkčního myšlení, ale má i hlubší význam. Zdůrazňování provázanosti školské matematiky a reálného světa i interdisciplinárních vztahů je významným argumentem v současných diskusích o potřebě a smyslu matematického vzdělávání a může žáky pomoci přesvědčit o užitečnosti matematiky a přispět k jejich celkové gramotnosti.

Literatura

[1] Eisenmann, P., O experimentu se spojitostí funkce na střední škole., *Učitel matematiky* **4**(1996) str. 213-9.

[2] Hejný, M., Kuřina, F., *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*, Portál, Praha, 2001

[3] Kopáčková, A., Vild, J., *Funkce po částech afinní*, In: Sborník příspěvků mezinárodní konference $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, str. 53-60, Liberec 2001.

[4] Kopáčková, A., Nejen žákovské představy o funkcích, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* **2**(2002), str. 149-161.

[5] Kopáčková, A., *Úlohy posilující funkční myšlení.*, In: Sborník příspěvků z 9. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, str. 139-145. JČMF, ZČU, Plzeň 2004.

[6] Kopáčková, A., *Funkce všude kolem nás.* In: Sborník příspěvků ze Setkání kateder připravujících učitele matematiky České a Slovenské republiky, str. 26-30. UJEP, Ústí nad Labem 2004.

[7] Kopáčková, A., *Pojmotvorný proces konceptu funkce.* Disertační práce. UK Praha 2003.

[8] Smith, E. E., *Concepts and thought.* In: The psychology of human thought. Cambridge University Press, Cambridge 1991.

RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.
KMD, Fakulta pedagogická TUL,
Hálkova 6
461 17 Liberec
e-mail: alena.kopackova@vslib.cz