Emil Calda

Nepořádky

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 3, 170–173

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150774

NEPOŘÁDKY

EMIL CALDA

Donedávna jsem si myslel, že k odvození vzorce pro počet nepořádků z n prvků, tj. vzorce

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} ,$$

je zapotřebí znát princip inkluze a exkluze. Teprve letos koncem února jsem zjistil, že to nutné není, a protože si své „objevy" nenechávám pro sebe, dávám ho tímto pedagogicko-matematické veřejnosti na vědomí.

Nepořádkem z prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ budeme nazývat každou permutaci z těchto prvků, ve které pro žádné i prvek a_i není v této uspořádané n-tici na i-tém místě. Znamená to, že každému z daných n prvků je v každé jejich permutaci zakázána právě jedna pozice, která je pro každý prvek jiná.

Počet nepořádků z n prvků budeme značit D_n (*derangement* – nepořádek). Platí např. $D_3 = 2$, neboť ve všech 3! permutacích ze tří prvků a_1, a_2, a_3 existují právě dva nepořádky: (a_2, a_3, a_1) a (a_3, a_1, a_2); zřejmě je $D_1 = 0$, $D_2 = 1$. Snadnou (a známou) úvahou odvodíme pro D_n rekurentní vzorec.

Nepořádky z prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n > 2$, kterých je D_n, rozložíme na $n-1$ disjunktních tříd podle toho, který z prvků $a_2, a_3, \ldots, a_n$ v nich je na prvním místě (prvek a_1 být první nemůže); určíme počet nepořádků v libovolné z těchto tříd, třeba v té, která obsahuje nepořádky začínající prvkem a_n. Tyto nepořádky jsou dvojího druhu:

a) na 1. místě je prvek a_n a na n-tém je prvek a_1,

b) na 1. místě je prvek a_n a na n-tém prvek a_1 není.

Počet nepořádků typu a) je zřejmě D_{n-2}: v každé permutaci jsou dvě místa obsazena prvky a_n, a_1 a zbývající $n-2$ místa jsou obsazena tak, že prvek a_i není na i-tém místě pro žádné $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

Počet nepořádků typu b) je zřejmě D_{n-1}: v každé permutaci je jedno místo obsazeno prvkem a_n a každému ze zbývajících $n-1$ prvků je zakázána právě jedna pozice, která je pro každý z nich jiná.

Počet nepořádků z daných n prvků, ve kterých je prvek a_n na prvním místě, je tedy roven součtu $D_{n-1} + D_{n-2}$, a protože to platí pro každou z $n-1$ uvedených tříd, máme výsledek:

Pro všechna $n > 2$ platí

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) ;$$

z počátečních podmínek $D_1 = 0$ a $D_2 = 1$, tak můžeme určit D_n pro libovolné n.

Stojí za povšimnutí, že stejný rekurentní vzorec platí i pro počet permutací z n prvků.

$$P(n) = (n-1)[P(n-1) + P(n-2)] ;$$

počáteční podmínky jsou ovšem jiné: $P(1) = 1$, $P(2) = 2$.

Získaný rekurentní vzorec pro D_n nyní upravíme na tvar

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}]$$

a postupně dosadíme $n = 3, 4, \ldots, n-2, n-1$. Dostaneme tak následujících $n-2$ rovností:

$$\begin{aligned}
D_3 - 3D_2 &= -(D_2 - 2D_1) , \\
D_4 - 4D_3 &= -(D_3 - 3D_2) , \\
&\ldots \\
D_{n-2} - (n-2)D_{n-3} &= -[D_{n-3} - (n-3)D_{n-4}] , \\
D_{n-1} - (n-1)D_{n-2} &= -[D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}] , \\
D_n - nD_{n-1} &= -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] .
\end{aligned}$$

Z rovnosti součinu levých stran a součinu pravých stran těchto rovností dostaneme po zkrácení a úpravě

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1)\ , \\ D_n &= nD_{n-1} + (-1)^n\ . \end{aligned}$$

Máme tak další rekurentní vzorec, který platí, jak se lze přesvědčit, pro všechna $n > 1$. Z tohoto vzorce už poměrně snadno získáme explicitní vyjádření pro D_n; jeho úpravou na tvar

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

a postupným dosazením $n = 2, 3, \ldots, n-1$ vznikne následujících $n-1$ rovností:

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{2!} - \frac{D_1}{1!} &= \frac{(-1)^2}{2!}\ , \\ \frac{D_3}{3!} - \frac{D_2}{2!} &= \frac{(-1)^3}{3!}\ , \\ &\ldots \\ \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{D_{n-2}}{(n-2)!} &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\ , \\ \frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} &= \frac{(-1)^n}{n!}\ . \end{aligned}$$

Jejich sečtením dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{D_n}{n!} - \frac{D_1}{1!} &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\ , \\ \frac{D_n}{n!} &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\ . \end{aligned}$$

Uvědomíme-li si ještě, že je $\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = 0$, můžeme získaný výsledek vyjádřit ve tvaru

$$D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\ .$$

Tím je hledaný vzorec odvozen, a to bez užití principu inkluze a exluze.

Poznámka. Víme-li, že je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} ,$$

dostaneme ze vzorce pro D_n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1} .$$

A když už jsme vzorec pro D_n odvodili, vyřešíme s jeho pomocí aspoň jednu úlohu.

Na tanečním večírku je n manželských dvojic. Když začne hrát hudba, utvoří všichni muži a ženy taneční páry. Určete počet způsobů, jak vytvořit taneční páry tak, aby právě k z těchto párů byly manželské dvojice.

Počet způsobů, jak utvořit k tanečních párů tvořených manželskou dvojicí je $\binom{n}{k}$. Protože žádný ze zbývajících $n-k$ tanečních párů nesmí tvořit manželská dvojice, je každému z $n-k$ mužů zakázáno, aby utvořil taneční pár se svou manželkou; počet způsobů, jak těchto $n-k$ mužů dát do páru s $n-k$ ženami, aby žádný pár nebyl tvořen manželskou dvojicí, je zřejmě D_{n-k}. Máme tak výsledek:

Hledaný počet způsobů utvoření tanečních párů je $\binom{n}{k}D_{n-k}$.

Podle pedagogické zásady č. 508 – *Vyřešený příklad necháme ve třídě několik minut doznívat, neboť převážná část žactva vůbec neví, co jsme to vlastně vypočetli* – necháme příklad doznít třeba tak, že ověříme jeho výsledek pro $k = 0$, $k = n$; také můžeme nechat zdůvodnit, proč pro $k = n-1$ vyjde počet tanečních párů roven nule.