Dag Hrubý
Vektory v elementární geometrii

*Učitel matematiky*, Vol. 13 (2005), No. 3, 163–169

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150773

# VEKTORY V ELEMENTÁRNÍ GEOMETRII

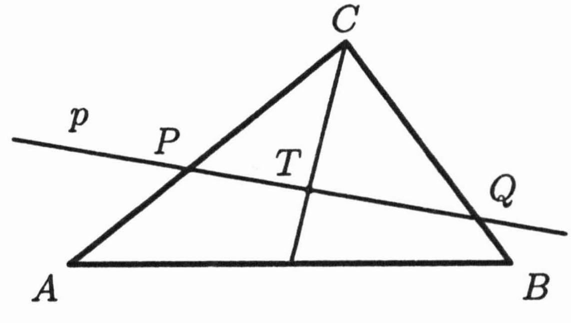
DAG HRUBÝ

Cílem příspěvku je ukázat užití vektorů při řešení některých úloh z planimetrie na gymnáziu. Učivo z planimetrie bývá zařazeno do prvního ročníku čtyřletého gymnázia a při řešení úloh nelze použít vektorů, které jsou zařazeny zpravidla do třetího ročníku. Při výkladu učiva o vektorech se většinou vektorový aparát používá v analytické geometrii a řešení úloh z planinetrie je spíše výjimkou. Motivem k napsání tohoto článku byla úloha, na kterou jsem narazil při listování v knížce [1].

**Úloha 1**

Přímka $p$ procházející těžištěm $T$ trojúhelníku $ABC$ protíná strany $AC$, $BC$ v bodech $P$, $Q$. Dokažte, že platí

$$\frac{|AP|}{|PC|} + \frac{|BQ|}{|QC|} = 1.$$

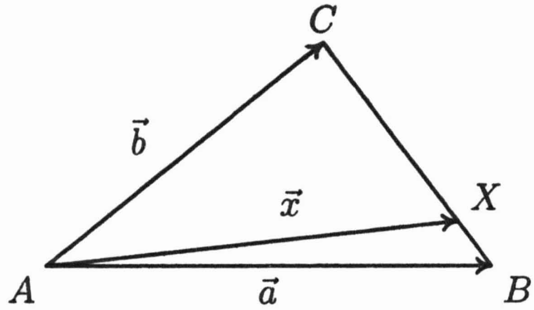



Obr. 1

Než přistoupíme k řešení úlohy 1, vyřešíme úlohu jednodušší.

**Úloha 2**

Na straně $BC$ trojúhelníku $ABC$ je dán bod $X$, který dělí tuto stranu v poměru $|BX| : |CX| = m : n$. Vyjádřete vektor $\vec{x} = X - A$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{a} = B - A$, $\vec{b} = C - A$.




Obr. 2

*Řešení:*

Zřejmě platí $\vec{x} = \vec{a} + \dfrac{m}{m+n} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$. Odtud po úpravě dostáváme

$$\vec{x} = \frac{n}{m+n} \cdot \vec{a} + \frac{m}{m+n} \cdot \vec{b} \tag{1}$$

Podle mého názoru by vztah (1) neměl chybět v žádné učebnici analytické geometrie pro střední školy. V případě, že $m = n$ dostáváme $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Obraťme nyní svoji pozornost na koeficienty v lineární kombinaci vektorů ve vztahu (1). Zřejmě platí

$$\frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n} = 1.$$

Označíme-li $\dfrac{m}{m+n} = \lambda$, pak $\dfrac{n}{m+n} = 1 - \dfrac{m}{m+n} = 1 - \lambda$. Pro vektor $\vec{x}$ pak platí

$$\vec{x} = (1 - \lambda) \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \tag{2}$$

Je-li $\lambda = 0$, pak $\vec{x} = \vec{a}$, resp. $X = A$, pro $\lambda = 1$ je $\vec{x} = \vec{b}$, resp. $X = B$ a pro $\lambda \in (0; 1)$ je bod $X$ vnitřním bodem úsečky $BC$. Dosavadní výsledky shrnuje následující věta.

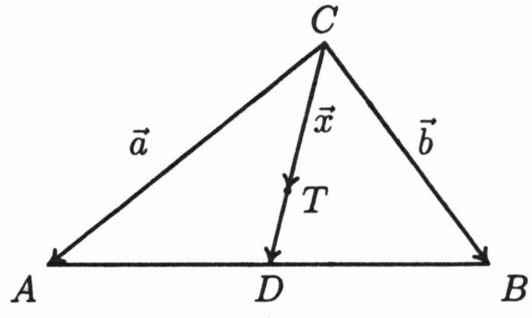
**Věta 1**

Pro libovolný bod $X \in BC$ v trojúhelníku $ABC$ platí

$$\vec{x} = (1 - \lambda) \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b},$$

kde $\lambda \in \langle 0; 1 \rangle$, $\vec{x} = X - A$, $\vec{a} = B - A$, $\vec{b} = C - A$.

Takto vyzbrojeni snadno vyřešíme úlohu 1 z úvodu tohoto článku. Označme $\vec{a} = A - C$, $\vec{b} = B - C$, $T$ těžiště trojúhelníku $ABC$ a bod $D$ střed strany $AB$ tak, jak je uvedeno na obr. 3.




Obr. 3

Pro vektor $\vec{x} = T - C$ platí

$$\vec{x} = T - C = \frac{2}{3}(D - C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \qquad (3)$$

Označíme-li $\vec{u} = P - C$, $\vec{v} = Q - C$, pak podle věty 1 platí

$$\vec{x} = (1 - \lambda) \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v},\ \lambda \in \langle 0; 1 \rangle \qquad (4)$$

Nyní vyjádříme $\vec{u}, \vec{v}$ pomocí $\vec{a}, \vec{b}$. Položme $\dfrac{|AP|}{|PC|} = r$ a $\dfrac{|BQ|}{|QC|} = s$. Připomeňme si v tuto chvíli, že máme dokázat $r + s = 1$. Zřejmě platí:

$$|AC| = |AP| + |PC| = r|PC| + |PC| = (r+1)\cdot|PC|$$
$$|BC| = |BQ| + |QC| = s|QC| + |QC| = (s+1)\cdot|BC|$$

Pro vektory $\vec{u}, \vec{v}$ dostáváme

$$\vec{u} = P - C = \frac{1}{1+r}\cdot(A-C) = \frac{1}{1+r}\cdot\vec{a}$$
$$\vec{v} = Q - C = \frac{1}{1+s}\cdot(B-C) = \frac{1}{1+s}\cdot\vec{b}$$

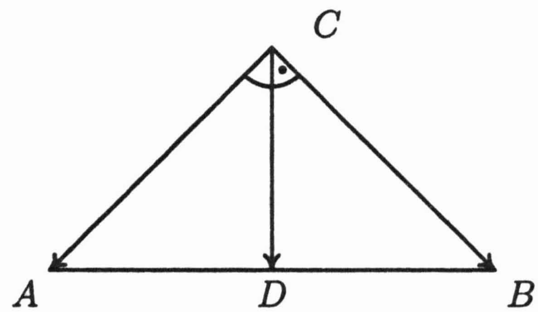
Po dosazení do (4) obdržíme

$$\vec{x} = \frac{1-\lambda}{1+r}\cdot\vec{a} + \frac{\lambda}{1+s}\cdot\vec{b}$$

Porovnáním s (3) musí platit $\frac{1-\lambda}{1+r} = \dfrac{1}{3}$ a podobně $\dfrac{\lambda}{1+s} = \dfrac{1}{3}$. Dále je $3-3\lambda = 1+r$ a $3\lambda = 1+s$. Odtud plyne $r+s = 2-3\lambda+3\lambda-1 = 1$, což jsme měli dokázat.

**Úloha 3**

V pravoúhlém trojúhelníku $ABC$ s pravým úhlem při vrcholu $C$ je bod $D$ patou výšky na stranu $AB$. Vyjádřete vektor $\vec{x} = D - C$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{a} = A - C$, $\vec{b} = B - C$.




Obr. 4

*Řešení:*

Označme $c_b = |AD|, c_a = |BD|$, $\lambda = \frac{c_b}{c}$. Potom je $1 - \lambda = 1 - \frac{c_b}{c} = \frac{c_a}{c}$. Zřejmě platí $\vec{x} = (1 - \lambda) \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$. Podle Euklidovy věty je $a^2 = c \cdot c_a, b^2 = c \cdot c_b$ a tedy také $\frac{a^2}{c^2} = \frac{c_a}{c}$ a podobně $\frac{b^2}{c^2} = \frac{c_b}{c}$. Po dosazení za $\lambda$ do vektoru $\vec{x}$ dostáváme

$$\vec{x} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot \vec{a} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \cdot \vec{b}$$

**Úloha 4**

V pravidelném čtyřstěnu $ABCD$ je bod $D'$ pata výšky vedené z vrcholu $D$ do roviny $ABC$ a bod $S$ je střed úsečky $DD'$. Bodem $S$ vedeme rovinu, která protíná hrany čtyřstěnu $AD$, $BD$, $CD$ po řadě v bodech $P$, $Q$, $R$ (viz obr. 5). Dokažte, že platí:

$$\frac{|AP|}{|PD|} + \frac{|BQ|}{|QD|} + \frac{|CR|}{|RD|} = 3$$

*Řešení:*

Položme $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{y} = \frac{1}{2}(D' - D), \vec{a} = A - D$, $\vec{b} = B - D$, $\vec{c} = C - D$. Zřejmě platí

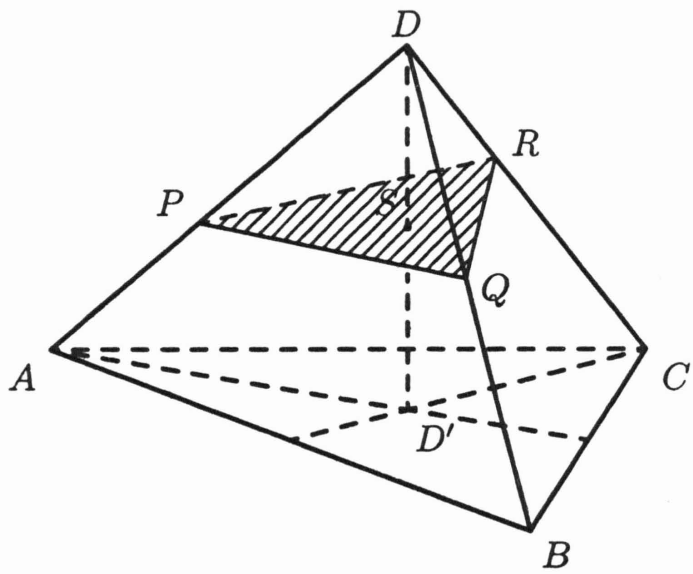
$$\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{3}(\vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

Pro vektor $\vec{x}$ pak dostáváme

$$\vec{x} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} \qquad (5)$$

Nyní vektor $\vec{x}$ vyjádříme ještě jednou, ale tentokrát pomocí vektorů $\vec{u} = P - D$, $\vec{v} = Q - D$, $\vec{w} = R - D$. V duchu předcházejících úvah můžeme psáti

$$\vec{x} = (1 - k) \cdot [(1 - \lambda) \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}] + k \cdot \vec{w} \qquad (6)$$




Obr. 5

Nyní vyjádříme vektory $P-D$, $Q-D$, $R-D$. Položme $\frac{|AP|}{|PD|} = p$, $\frac{|BQ|}{|QD|} = q$ a $\frac{|CR|}{|RD|} = r$. Máme dokázat, že $p+q+r=3$. Zřejmě platí

$$|AD| = |AP| + |PD| = p|PD| + |PD| = (p+1)\cdot|PD|$$
$$|BD| = |BQ| + |QD| = q|QD| + |QD| = (q+1)\cdot|BD|$$
$$|CD| = |CR| + |RD| = r|RD| + |RD| = (r+1)\cdot|CD|$$

Pro vektory $\vec{u} = P - D$, $\vec{v} = Q - D$, $\vec{v} = R - D$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= P - D = \frac{1}{1+p} \cdot (A - D) = \frac{1}{1+p} \cdot \vec{a} \\
\vec{v} &= Q - D = \frac{1}{1+q} \cdot (B - D) = \frac{1}{1+q} \cdot \vec{b} \\
\vec{w} &= R - D = \frac{1}{1+r} \cdot (C - D) = \frac{1}{1+r} \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

Po dosazení do (6) máme

$$\vec{x} = (1 - k) \cdot \left[\frac{1-\lambda}{1+p} \cdot \vec{a} + \frac{\lambda}{1+q} \cdot \vec{b}\right] + \frac{k}{1+r} \cdot \vec{c} \tag{7}$$

Nyní provnáme koeficienty vektorů (5), (7). Zřejmě platí

$$\frac{(1-k)\cdot(1-\lambda)}{1+p} = \frac{1}{6} \qquad \frac{(1-k)\cdot\lambda}{1+q} = \frac{1}{6} \qquad \frac{k}{1+r} = \frac{1}{6}$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned}
6 - 6k - 6\lambda + 6k\lambda &= 1 + p \\
6\lambda - 6k\lambda &= 1 + q \\
6k &= 1 + r
\end{aligned}$$

Sečtením daných rovnic dostáváme $p + q + r = 3$.

# Literatura

[1] Gelfand, M. B, *Matěmatika – spravočnoje posobije*, Kiev, Vysča škola, 1982

*RNDr. Dag Hrubý*
*Gymnázium, A. K. Vítáka 452*
*569 43 Jevíčko*
*e-mail: hruby@gymjev.cz*