Učitel matematiky

Naďa Stehlíková

Uvedení do matematické analýzy aneb o jedné zajímavé knize

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 2, 109–116

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150766`

UVEDENÍ DO MATEMATICKÉ ANALÝZY ANEB O JEDNÉ ZAJÍMAVÉ KNIZE

NAĎA STEHLÍKOVÁ[3]

Úvod

V rámci rubriky *Úlohy ze zahraničí* upozorňujeme i na zajímavé knihy, které by neměly uniknout pozornosti učitelů (viz např. Stehlíková, 2000a, 2000b). Tentokrát se podíváme na knihu věnovanou převážně vysokoškolské matematice. Jejím specifikem je, že není napsána tradičním způsobem „definice – věta – důkaz", ale obsahuje pouze řešené úlohy. Tyto úlohy však nemají procvičovací charakter, jak tomu nejčastěji bývá, ale prostřednictvím jejich řešení si má student příslušnou teorii sám vybudovat.

Podobného typu je i kniha Bower (1973), která se zabývá algebrou a zejména kongruencemi. Jejich vlastnosti jsou vyvozovány pomocí velmi podrobného zkoumání kongruencí modulo 5 a 6. Autorka se v úvodu dotýká aspektu, který je vysokoškolskými učiteli často kritizován (vlastní překlad): „Profesionálnímu matematikovi se tempo úvodních kapitol může zdát pomalé a použité metody těžkopádné. Ovšem zkušenosti ukazují, že toto tempo a tyto metody poskytují studentům čas a prostředky, kterými mohou dosáhnout porozumění látce, zvyknout si na značení a zdokonalit se v tomto typu uvažování. Když je tempo na začátku příliš rychlé a metody příliš elegantní, pak si studenti osvojí špatný zvyk povrchního čtení a budou se pokoušet memorovat látku bez porozumění. Potřebují čas, aby se seznámili s pojmy, a musí mít možnost řešení jednotlivých úloh popisovat zprvu vlastními slovy. Pokud se pak seznámí se stručnými a důmyslnými matematickými metodami, ti nadanější jim porozumí a přivítají je, a tak povzbudí ostatní, aby se jim také snažili porozumět a používat je."

[3] Článek byl vytvořen v rámci řešení grantu GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

V této souvislosti se musím zmínit i o knize, která je v českém prostředí poměrně známá (Dynkin, Uspenskij, 1955). Obsahuje pečlivě připravené série úloh, jejichž řešením čtenář objevuje nové poznatky. Autoři se ale nevyhýbají ani přímým instrukcím, pokud je to třeba (např. „Nejrychlejší způsob, jak najít rozdíl mezi dvěma čísly v m-aritmetice, je následující: Najděte rozdíl v běžné aritmetice a pokud je záporný, přičtěte m.“), nebo formulují hypotézu, kterou má čtenář dokázat (např. „Dokažte, že pro $a \neq 0$ má rovnice $x^2 = a$ v p-aritmetice (p je prvočíslo) buď dva kořeny, nebo žádný“).

Výše zmíněné knihy nutně představují výběr z existující literatury. Podobný charakter mají i jiné učebnice, např. Kuřina (2002), kde si student odvozuje řadu poznatků sám na základě řešení úloh.

R. P. Burn: Numbers and Functions

Kniha R. P. Burna (2000) se zabývá matematickou analýzou. Autorovy poznámky v úvodu naznačují, že jeho přístup do jisté míry odpovídá principům konstruktivistické výuky (viz např. Hejný, Kuřina, 2001) (vlastní překlad): „Takže první princip, na němž stojí tento text, je zapojit studenty do tvorby nových pojmů použitím myšlenek a metod, jež jsou jim známé. Druhým principem je fakt, že jeden z nejméně obtížných nových pojmů, s nimiž se student setká v univerzitní matematice, je zevšeobecňování. Pečlivě vybraný speciální případ, s kterým dokážeme pracovat, poskytuje základ vlastní formulace obecné teorie a tato posloupnost vývoje (od speciálních případů k obecné větě) zaktivňuje studentovo porozumění tam, kde by formulace samotné obecné věty byla nejasná.“ Předpokladem úspěšného použití knihy je i to, aby každý student měl grafickou kalkulačku nebo matematický program na počítači.

Z názvů kapitol si čtenář může vytvořit představu o tom, jakých partií matematické analýzy se kniha týká: Matematická indukce, Nerovnosti, Posloupnosti – první seznámení s nekonečnem, Racionální čísla, Řady – nekonečné součty, Funkce a spojitost – okolí a limita funkce, Spojitost – funkce na intervalu, Derivace –

tečny, Derivace – věta o střední hodnotě a Taylorova věta, Integrál – základní věta analýzy, Exponenty a trigonometrické funkce, Posloupnosti funkcí.

Nové poznatky jsou v každé kapitole důsledně uváděny pomocí řešení úloh (viz ilustrace dále), které jsou podány i s výsledky a případně s nástinem řešení. Pokud je k úloze potřeba nějaký nový pojem, je nejprve v textu definován. Na konci každé uavřené části je uvedeno přehledné shrnutí nové látky, kterou předchozí úlohy přinesly. Na konci kapitol je historická poznámka (viz ilustrace dále).

Ilustrace

Vzhledem ke čtenářské obci časopisu jsem jako ilustraci vybrala úlohy, které mají studenty vést k odhalení základních vlastností aritmetického a geometrického průměru. Čísla úloh odpovídají číslům v knize. V hranatých závorkách jsou výsledky úloh.

30. Nechť jsou čísla 2, A a 8 tři po sobě následující členy aritmetické posloupnosti. Najděte číslo A.
Číslo A se nazývá *aritmetický průměr* čísel 2 a 8.
Nechť jsou čísla 2, G a 8 tři po sobě následující členy geometrické posloupnosti kladných čísel. Najděte číslo G.
Číslo G se nazývá *geometrický průměr* čísel 2 a 8.
Co je větší, A, nebo G?

[$A = 5$, $G = 4$]

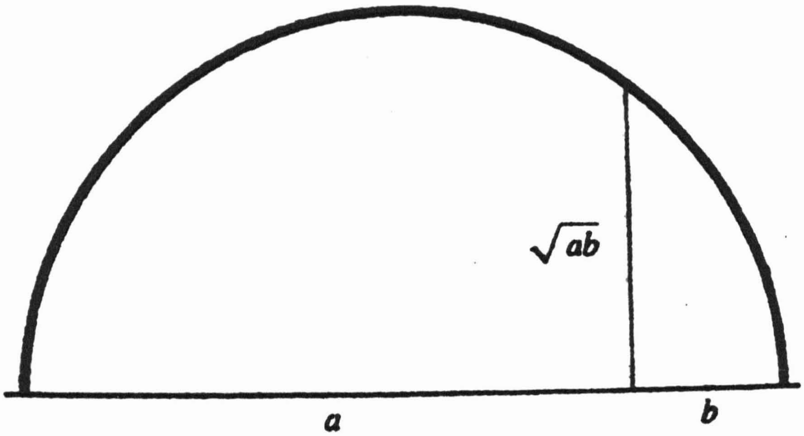
31. Najděte aritmetický a geometrický průměr čísel 2 a 3. Ověřte, že $(2\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{4}$ a že aritmetický průměr čísel 2 a 3 je větší než jejich geometrický průměr. Ověřte, že podobný výsledek dostaneme, použijeme-li nerovnost $0 < (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.

[$A = 2\frac{1}{2}$, $G = \sqrt{6}$, $(2\frac{1}{2})^2 > 6$, $2\sqrt{6} < 5$.]

32. (*Eukleides*) Nechť jsou a a b kladná čísla, najděte aritmetický a geometrický průměr čísel a^2 a b^2. Který z nich je větší? Za jakých podmínek jsou oba průměry stejné?

[$0 \leq (a-b)^2 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$. Rovnost nastane jen tehdy, když $a = b$.]

33. Nechť a a b jsou kladná čísla. Dokažte, že $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$. Za jakých okolností nastává rovnost?



[$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \Rightarrow 2\sqrt{a}\sqrt{b} \leq a + b \Rightarrow \sqrt{a}\sqrt{b} \leq \frac{1}{2}(a+b)$. Rovnost nastane jen tehdy, když $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.]

34. Dokažte, že pro každé kladné číslo a platí $2 \leq a + \frac{1}{a}$.

[V předchozí úloze položte $b = \frac{1}{a}$.]

35. Ve vzdálené vesnici žije jediný zelinář. Používá váhu se dvěma miskami a jedno kilogramové závaží. Jednoho dne se váha rozbila. Při její opravě se zelináři nepodařilo dostat jazýček vah přesně do středu.

Do obchodu přišel zákazník a požádal o 2 kg jablek. Zelinář položil jednokilogramové závaží na levou misku vah a do pravé dával jablka, dokud se váha neustálila. Pak jablka vysypal do hnědé papírové tašky. Potom dal závaží do pravé misky a naplnil levou misku jablky, dokud se váha neustálila. Nakonec přidal tato jablka do papírové tašky a tu podal zákazníkovi.

(Rovnost momentů sil: když se váha ustálí, tíha závaží v první misce krát délka příslušného ramene se rovná tíze ve druhé misce krát délka příslušného ramene.)

Rozhodněte, co je správně:

(1) Zákazník dostane 2 kg jablek.

(2) Zákazník dostane *více* než 2 kg jablek.

(3) Zákazník dostane *méně* než 2 kg jablek.

[Označme l délku levého ramene váhy, r délku pravého ramene váhy, v hmotnost jablek vážených v levé misce a w hmotnost jablek vážených v pravé misce. Pak $lv = r \cdot 1$ a $rw = l \cdot 1$. Vyjádříme $v + w = \frac{r}{l} + \frac{l}{r} = \frac{r}{l} + \frac{1}{\frac{r}{l}}$, a to je podle úlohy 34 větší než 2, pokud není $l = r$.]

36. Jaký obdélník má při daném obvodu největší obsah?

[Označme délky stran obdélníku a a b. Obvod obdélníku je roven $2(a + b)$ a jeho obsah ab. Platí $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$, což je konstanta, takže obsah je maximální, pokud $a = b$.]

37. Nechť x a a jsou kladná čísla. Najděte aritmetický a geometrický průměr čísel x a a^2/x.
Nechť $x_1 > 0$ a x_{n+1} je definováno jako $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a^2/x_n)$. Ukažte, že pak $a \leq x_{n+1} \leq x_n$ pro $n \geq 2$.

[$G = a$, $A = \frac{1}{2}(x + a^2/x)$; $G \leq A \Rightarrow a \leq x_{n+1} \leq x_n$, kromě případu, kdy $n = 1$. Tento poznatek je základem Heronovy metody hledání druhých odmocnin.]

38. Nechť a_1 a b_1 jsou daná kladná čísla, pro která $a_1 < b_1$, a nechť jsou definovány dvě posloupnosti kladných čísel jako $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ a $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Dokažte, že

(i) $0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$,

(ii) $0 < b_{n+1} - a_{n+1} < b_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$,

(iii) $0 < b_{n+1} - a_{n+1} < (\frac{1}{2})^n(b_1 - a_1)$.

To znamená, že se oba průměry se zvyšujícím se n přibližují.

(iv) Dokažte, že $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2$ a že pokud $1 \leq$ $\leq a < b$, pak $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(b - a)$.

(v) Nechť $a_1 = 1$ a $b_1 = 2$. Dokažte, že $b_5 - a_5 < \frac{1}{2^{45}}$, tj. obě posloupnosti se rychle přibližují.

[(i) Využijte faktu, že GP<AP a matematické indukce. (iii) Využijte (ii) a indukci. (v) $b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{8}(b_n - a_n)^2$. Podobné dvojice posloupností zkoumal už Gauss.]

Historická poznámka vztahující se k průměrům

Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem se poprvé objevuje v Eukleidových *Základech* (II.5, V.25 a lema mezi X.59 a X.60). Obecný tvar této nerovnosti pro n kladné se objevuje v knize A. L. Cauchyho *Cours d'analyse* (1821).

Závěr

Knihu představenou v tomto článku jsem ve vlastní výuce nevyzkoušela, nevím tedy, jak by fungovala přímo se studenty. Nicméně podle autora byla napsána na základě několika let vlastní výuky, které vedly k několikerému přepracování. Některé její partie by se jistě daly využít i na našich vysokých školách či při práci s talentovanými studenty střední školy. Vytknout by se jí dalo to, že některé úlohy jsou formulovány jako příliš uzavřené a že řešitel vlastně neví, proč by se jimi měl zabývat. Cennější by bylo, kdyby byl dán otevřený problém, u kterého by student měl formulovat i strategii řešení. V případě výše uvedené ukázky by tak úlohy nebyly formulovány jako „dokažte, že ...", ale „zjistěte, zda platí ..." či „zjistěte, co platí" a teprve pak „dokažte".

Jsem si vědoma možných námitek proti podobnému stylu vyučování na úrovni vysoké školy, z nichž asi nejzávažnější je velká časová náročnost. Nemyslím, že bychom měli podobným způsobem vyučovat veškerou matematiku, ale na druhé straně se domnívám, že alespoň v některém předmětu by se s ním studenti setkat měli. Problém je ještě palčivější u studentů, budoucích učitelů matematiky, kteří se často učí matematiku pouze memorováním a k podobnému přístupu pak vedou své budoucí žáky. Na některých pedagogických fakultách se o tento způsob v některých disciplínách vyučující snaží (viz např. Prokopová, 2004; Stehlíková, 2003).

Na závěr uvádím citát F. Kuřiny (2004), který se mi v této souvislosti jeví jako zásadní: „Systém tradičního univerzitního vzdělávání ve formě přednášek, cvičení a zkoušek vede spíše k encyklopedickému chápání matematiky (soubor definic, vět a důkazů) než k jejímu chápání aplikačnímu, které má k rozvíjení kompetencí blíže. Přesto jsem přesvědčen, že i v rámci současného systému je možné klást důraz na poznávání cest k matematickým pojmům a poznatkům, na rozdíl od předávání části logicky uspořádané matematické disciplíny, a na posílení „pracovního“ charakteru matematiky, na rozdíl od charakterů reprodukčně memorovacího.“

Literatura

[1] Bower, J.W., *Mathematics, a creative art*, San Francisco: Holden–Day, Inc., 1973.

[2] Burn, R.P., *Numbers and Functions. Steps into Analysis.*, Druhé vydání. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[3] Dynkin, J.B., Uspenskij, V.A., *Matematické besedy.*, Praha: SNTL, 1955.

[4] Hejný, M., Kuřina, F., *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*, Praha: Portál, 2001.

[5] Kuřina, F., *10 geometrických transformací.*, Praha: Prometheus, 2002.

[6] Kuřina, F., Problémy a omyly našeho školství., *In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), Dva dny s didaktikou matematiky, sborník příspěvků* Praha: PedF UK, 2004.

[7] Prokopová, M., Konstruktivistické přístupy ve výuce algebry budoucích učitelů., In Ausbergerová, M. & Novotná, J. (eds.),

9. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Plzeň: Vydavatelský servis, 2004, 259–266.

[8] Stehlíková, N., O jedné zajímavé knize z elementární teorie čísel (1), *Učitel matematiky,* 2000a, **8**(3), 167–171.

[9] Stehlíková, N., O jedné zajímavé knize z elementární teorie čísel (2), *Učitel matematiky,* 2000b, **8**(4), 231–236.

[10] Stehlíková, N., Ilustrace konstruktivistických přístupů k vyučování na vysoké škole., In Burjan, V., Hejný, M. & Jány, Š. *Zborník príspevkou z letnej školy z teórie vyučovania matematiky Pytagoras* Bratislava: EXAM, 2003, 83–88.

RNDr. Naďa Stehlíková, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky PdF UK
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1
e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz