Učitel matematiky

Michal Šmerek

Citlivost kořenů polynomů

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 2, 100–108

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150765`

CTLIVOST KOŘENŮ POLYNOMŮ

MICHAL ŠMEREK

1. Úvod

Problém řešení algebraických rovnic se může zdát zcela vyřešený. Známe algoritmy pro určení všech kořenů libovolného polynomu. Přesto i v této problematice existují dosud nepříliš probádané oblasti. Zájemcům o základní studium numerické matematiky lze doporučit publikace [1, 2, 3, 5, 6, 7, 10].

Článek se zabývá problematikou tzv. špatně podmíněných polynomů, tj. polynomů, u nichž malá změna některého z koeficientů vede k velké změně v kořenech. Tomuto speciálnímu tématu se věnují práce [1, 4, 5, 8, 9, 11].

2. Špatně podmíněné polynomy

Uvažujme polynom p stupně $n \geq 2$ s reálnými koeficienty tvaru

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{1}$$

Označme kořeny polynomu (1) ξ_i, pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Hledáním kořenů polynomu se zabývá např. článek [7].

Platí tedy $p(\xi_i) = 0$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Budeme se zabývat tím, jak se změní kořeny polynomu, pokud se polynom (1) mírně změní. Budeme určovat kořeny polynomu

$$p(x) + \delta p(x) \equiv p(x) + \delta a_r x^r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n\,, \tag{2}$$

tj. uvažujeme pouze změnu koeficientu u mocniny x^r, a to z a_r na $a_r + \delta a_r$. Označíme-li $\delta\xi_i$ změnu kořene ξ_i při přechodu od polynomu (1) k polynomu (2), platí

$$p(\xi_i + \delta\xi_i) + \delta a_r (\xi_i + \delta\xi_i)^r = 0. \tag{3}$$

Odtud můžeme vyjádřit

$$p(\xi_i + \delta\xi_i) = -\delta a_r(\xi_i + \delta\xi_i)^r \cong -\delta a_r \xi_i^r, \tag{4}$$

kde přibližný vztah je platný za podmínky $\delta\xi_i \ll \xi_i$.

Taylorův rozvoj funkce $p(x)$ v bodě $x = \xi_i$ je

$$p(\xi_i + \delta\xi_i) = p(\xi_i) + p'(\xi_i)\delta\xi_i + \frac{p''(\xi_i)}{2!}(\delta\xi_i)^2 + \cdots . \tag{5}$$

Platí $p(\xi_i) = 0$. Pokud ξ_i je jednoduchý kořen, platí také $p'(\xi_i) \neq$ $\neq 0$. Jestliže $|\delta\xi_i| \ll 1$, můžeme ostatní členy Taylorova rozvoje (5) zanedbat. Porovnáním se vztahem (4) získáme vyjádření změny $\delta\xi_i$ jednoduchého kořene ξ_i

$$\delta\xi_i = -\frac{\xi_i^r}{p'(\xi_i)}\delta a_r. \tag{6}$$

Pokud u nějakého polynomu malá změna koeficientu (změna na vstupu) způsobí mnohem větší změnu jeho kořenů (změna na výstupu), nazýváme takový polynom *špatně podmíněným polynomem.*

Tuto podmíněnost lze definovat jako podíl relativní změny na výstupu a relativní změny na vstupu. K tomu účelu definujme *koeficient podmíněnosti* k_{ir} jakožto podíl relativní změny kořene ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a relativní změny koeficientu a_r $(r = 0, 1, \ldots, n)$, tzn.

$$k_{ir} = \frac{\frac{\delta\xi_i}{\xi_i}}{\frac{\delta a_r}{a_r}} \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \text{ a } r = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Vezmeme-li v úvahu vztah (6), můžeme psát

$$k_{ir} = \frac{\xi_i^{r-1}}{p'(\xi_i)} a_r \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n \text{ a } r = 0, 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Koeficient podmíněnosti k_{ir} je příslušný i-tému kořenu a r-tému koeficientu.

Číslo podmíněnosti C_p polynomu definujeme jako maximum z absolutních hodnot všech koeficientů podmíněnosti, tj.

$$C_p = \max_{i,r} |k_{ir}|. \tag{9}$$

Pomocí čísla podmíněnosti můžeme definovat *špatně podmíněný polynom* jako polynom, jehož číslo podmíněnosti je mnohem větší než jedna, tj.

$$C_p \gg 1.$$

3. Příklad 1

Uvažujme jednoduchý polynom

$$p(x) = x^2 - 3x + 2. \tag{10}$$

Jeho kořeny jsou $\xi_1 = 1$ a $\xi_2 = 2$, viz obr. 1.

Prozkoumejme, jak bude vypadat polynom (10) a jeho kořeny, pokud změníme postupně všechny jeho koeficienty o hodnotu +0,1 resp. −0,1.

Na obrázku 2 jsou grafy polynomů

$$p_0^+(x) = x^2 - 3x + 2{,}1 \text{ a } p_0^-(x) = x^2 - 3x + 1{,}9.$$

Obrázek 3 znázorňuje polynomy

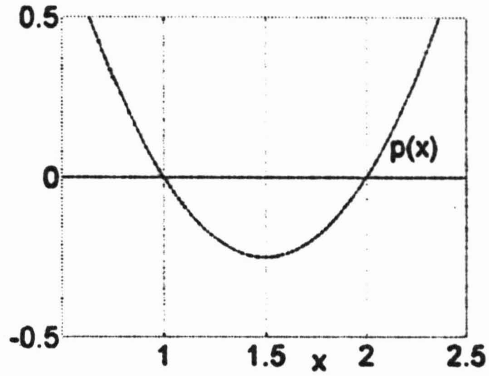
$$p_1^+(x) = x^2 - 2{,}9x + 2 \text{ a } p_1^-(x) = x^2 - 3{,}1x + 2$$

a obrázek 4 zobrazuje polynomy

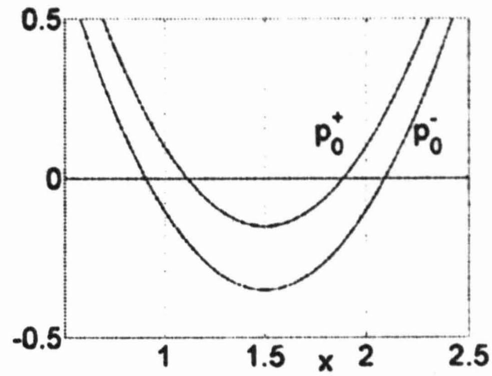
$$p_2^+(x) = 1{,}1x^2 - 3x + 2 \text{ a } p_2^-(x) = 0{,}9x^2 - 3x + 2.$$

Vypočítejme kořeny takových polynomů a odchylky těchto kořenů od původních kořenů. Jejich přibližné hodnoty u všech těchto polynomů uvádí tabulka 1.

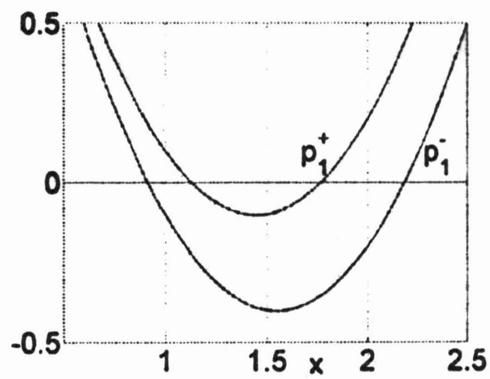
Podobně můžeme uvažovat i změnu polynomu (10) např. desetkrát menší, tj. změnu koeficientu $a_r (r = 0, 1, 2)$ o hodnotu +0,01; resp. −0,01; viz tabulka 2.



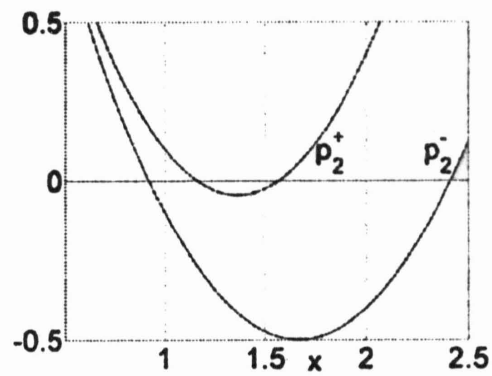
Obrázek 1 $p(x) = x^2 - 3x + 2$



Obrázek 2 $\delta a_0 = \pm 0{,}1$



Obrázek 3 $\delta a_1 = \pm 0{,}1$



Obrázek 4 $\delta a_2 = \pm 0{,}1$

Aplikací vzorce (6) pro polynom (10) získáme

$$\delta\xi_i = -\frac{\xi_i^r}{2\xi_i - 3}\delta a_r, \quad \text{pro } i = 1, 2,\ r = 0, 1, 2. \tag{11}$$

Konkrétně

$$\delta\xi_1 = -\frac{1^r}{2 \cdot 1 - 3}\delta a_r = \delta a_r, \quad \text{pro } r = 0, 1, 2\,; \tag{12}$$

$$\delta\xi_2 = -\frac{2^r}{2 \cdot 2 - 3}\delta a_r = -2^r \delta a_r = \left\{ \begin{array}{l} -\delta a_0 \\ -2\delta a_1 \\ -4\delta a_2 \end{array} \right. . \tag{13}$$

$p(x)$	ξ_1	ξ_2	$\delta\xi_1$	$\delta\xi_2$
x^2-3x+2	1	2	———	———
$x^2-3x+2,1$	$1,1127$	$1,8873$	$0,1127$	$-0,1127$
$x^2-3x+1,9$	$0,9084$	$2,0916$	$-0,0916$	$0,0916$
$x^2-2,9x+2$	$1,1298$	$1,7702$	$0,1298$	$-0,2298$
$x^2-3,1x+2$	$0,9156$	$2,1844$	$-0,0844$	$0,1844$
$1,1x^2-3x+2$	$1,1604$	$1,5669$	$0,1604$	$-0,4331$
$0,9x^2-3x+2$	$0,9213$	$2,4120$	$-0,0787$	$0,4120$

Tabulka 1 Hodnoty kořenů a změn kořenů pro $\delta a_r = \pm 0{,}1$

$p(x)$	ξ_1	ξ_2	$\delta\xi_1$	$\delta\xi_2$
x^2-3x+2	1	2	———	———
$x^2-3x+2,01$	$1,0101$	$1,9899$	$0,0101$	$-0,0101$
$x^2-3x+1,99$	$0,9901$	$2,0099$	$-0,0089$	$0,0099$
$x^2-2,99x+2$	$1,0102$	$1,9798$	$0,0102$	$-0,0202$
$x^2-3,01x+2$	$0,9902$	$2,0198$	$-0,0098$	$0,0198$
$1,01x^2-3x+2$	$1,0103$	$1,9600$	$0,0103$	$-0,0400$
$0,99x^2-3x+2$	$0,9903$	$2,0400$	$-0,0097$	$0,0400$

Tabulka 2 Hodnoty kořenů a změn kořenů pro $\delta a_r = \pm 0{,}01$

Pro změnu $\delta a_0 = \pm 0{,}1$ dostáváme změny kořenů
$\delta\xi_1 = \pm 0{,}1$ a $\delta\xi_2 = \mp 0{,}1$.
Podobně pro $\delta a_1 = \pm 0{,}1$ je $\delta\xi_1 = \pm 0{,}1$ a $\delta\xi_2 = \mp 0{,}2$;
resp. pro $\delta a_2 = \pm 0{,}1$ je $\delta\xi_1 = \pm 0{,}1$ a $\delta\xi_2 = \mp 0{,}4$.
Změně $\delta a_r = \pm 0{,}01$ odpovídá změna kořenů úměrně menší.

Není bez zajímavosti srovnání těchto teoretických výsledků (jejich první aproximace) s empirickými, viz srovnání výsledků (12) a (13) pro $\delta a_r = \pm 0{,}1$; resp. $\delta a_r = \pm 0{,}01$; s údaji v tabulce 1, resp. s údaji v tabulce 2.

Ze vztahu (8) můžeme určit koeficienty podmíněnosti k_{ir} pro $i = 1, 2$, $r = 0, 1, 2$ (viz tabulka 3).
Číslo podmíněnosti je potom $C_p = 3$, tzn. polynom (10) je dobře podmíněným polynomem.

i/r	0	1	2
1	-2	3	-1
2	1	-3	2

Tabulka 3 Koeficienty podmíněnosti k_{ir} pro polynom $p(x) = x^2 - 3x + 2$

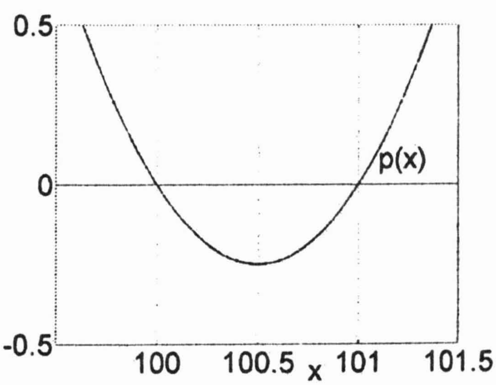
4. Příklad 2

Mějme polynom

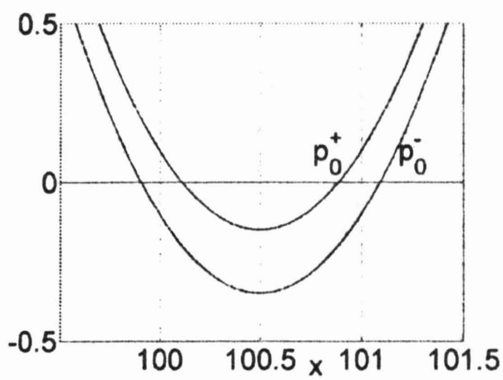
$$p(x) = x^2 - 201x + 10100, \tag{14}$$

viz obrázek 5.
Jeho kořeny, $\xi_1 = 100$ a $\xi_2 = 101$, se liší opět o jedničku (jako v příkladu 1), jen jsou mnohem větší.

Prozkoumejme, jak bude vypadat polynom (14) a jeho kořeny, pokud postupně nepatrně změníme všechny jeho koeficienty. Tyto změněné polynomy jsou graficky znázorněné na obrázcích 6, 7 a 8.

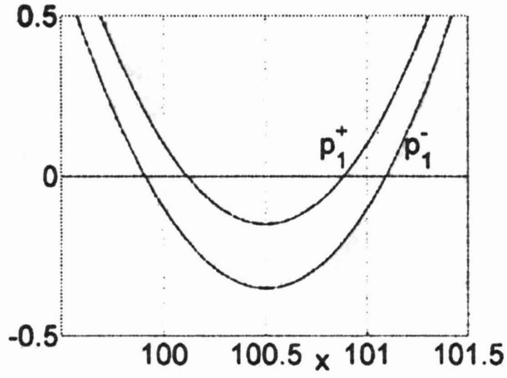


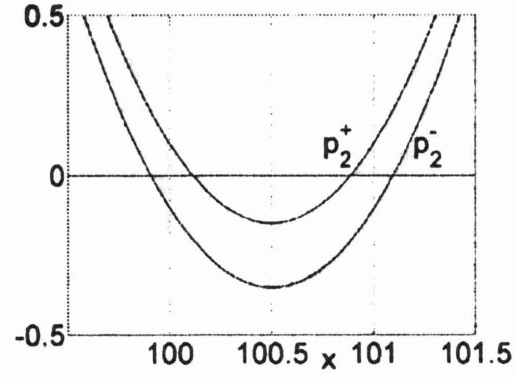
Obrázek 5 $p(x) = x^2 - 201x + 10100$



Obrázek 6 $\delta a_0 = \pm 10^{-1}$

V tabulce 4 jsou vypočteny koeficienty podmíněnosti k_{ir}. Z tabulky můžeme zjistit hodnotu čísla podmíněnosti polynomu (14), $C_p = 201$, a tudíž polynom (14) považujeme za špatně podmíněný polynom.





Obrázek 7 $\delta a_1 = \pm 10^{-3}$ Obrázek 8 $\delta a_2 = \pm 10^{-5}$

i/r	0	1	2
1	−101	201	−100
2	100	−201	101

Tabulka 4 Koeficienty podmíněnosti k_{ir} pro polynom $p(x) = x^2 - 201x + 10100$

5. Příklad 3

Na závěr se zabývejme polynomem

$$p(x) = x^2 - 3{,}01x + 2{,}265. \tag{15}$$

Jeho kořeny, $\xi_1 = 1{,}5$ a $\xi_2 = 1{,}51$, jsou na rozdíl od příkladu 1 vzájemně mnohem bližší.

Koeficienty podmíněnosti k_{ir} jsou uvedeny v tabulce 5.

i/r	0	1	2
1	−151	301	−150
2	150	−301	151

Tabulka 5 Koeficienty podmíněnosti k_{ir} pro polynom $p(x) = x^2 - 3,01x + 2,265$

Z tabulky můžeme odečíst hodnotu čísla podmíněnosti polynomu (15), $C_p = 301$, a tedy polynom (15) je špatně podmíněným polynomem.

6. Závěr

V případě špatně podmíněných polynomů může i malá změna byť jen jednoho koeficientu způsobit velkou změnu v jeho kořenech. Je třeba mít toto na paměti při přibližném určování koeficientů polynomu, při jejich zaokrouhlování, apod.

Domnívám se, že problematika špatně podmíněných polynomů může být vhodným tématem jako rozšiřující učivo i pro střední školy s rozšířenou výukou matematiky. Studium této problematiky umožní lépe si uvědomit krásu i záludnost polynomů.

Literatura

[1] BULIRSCH, R.; STOER, J. *Introduction to Numerical Analysis.* New York : Springer-Verlag, 1983. 604 s. ISBN 0-387-90420-4.

[2] DONT, M. *Numerické metody – cvičení.* Praha : ČVUT. Fakulta elektrotechnická, 1990. 160 s. ISBN 80-01-00400-7.

[3] HOROVÁ, I. *Numerické metody.* 1. vyd. Brno : MU v Brně, 1999. 230 s. ISBN 80-210-2202-7.

[4] ORTEGA, J. M.; RHEINBOLDT, W. C. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables.* New York : Academic Press, 1970.

[5] RALSTON, A. *Základy numerické matematiky.* 1. vyd. Praha : Academia, 1973. 636 s.

[6] ŠMEREK, M. Metody řešení nelineárních rovnic. In *XVIII. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu (sborník příspěvků).* Vyškov : VVŠ PV, 2000. s. 337–340. ISBN 80-7231-059-3.

[7] ŠMEREK, M. Výpočet kořenů polynomu. In *XIX. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu (sborník příspěvků).* Vyškov : VVŠ PV, 2001. s. 399–402. ISBN 80-7231-071-2.

[8] ŠMEREK, M. Špatně podmíněné polynomy. In *XX. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu (sborník příspěvků)*. Vyškov : VVŠ PV, 2002. s. 421–423. ISBN 80-7231-090-9.

[9] ŠMEREK, M. Citlivost polynomů a podmíněnost matic. *XXI. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu : sborník abstraktů a elektronických verzí příspěvků na CD-ROMu.* [CD-ROM]. Vyškov : VVŠ PV, 2003 [cit. 2003-05-22]. ISBN 80-7231-105-0. Adresář: /clanky/1sxmerem.pdf.

[10] VITÁSEK, E. *Numerické metody.* Praha : SNTL, 1987.

[11] WILKINSON, J. H. The evaluation of the zeros of ill-conditioned polynomials. Part I. *Numerische Mathematik 1*, 1959, vol. 1, s. 150–166.

Mgr. Michal Šmerek
Katedra ekonometrie FEM UO
Kounicova 65, 612 00 Brno
doktorand PřF MU Brno
e-mail: michal.smerek@unob.cz