O DŮKAZU JEDNÉ NEROVNOSTI

DAG HRUBÝ

Cílem předloženého článku je ukázat různé přístupy k důkazu nerovnosti
$$\forall x \in \mathbb{R}^+\colon\ x + \frac{1}{x} \geq 2.$$
Řekl jsem si jednou, že zkusím najít deset důkazů této nerovnosti. Výsledkem mého snažení je předkládaný článek. Čtenář může posoudit, zda se mi úkol podařil, či ne. Já sám o tom pochybuji, protože některé předkládané důkazy jsou zhruba řečeno „ekvivalentní" a komise pro důkazy by mi je asi neuznala. Předsedou této komise (ve zkratce KPDPDM) je totiž doc. dr. Emil Calda, HgS, který je velice přísný, což pravděpodobně souvisí s tím, že práce v KPDPDM není honorována. Nyní tedy k jednotlivým důkazům.

1. Důkaz sporem

Schéma důkazu sporem:

Předpoklady: $\overline{A} \Rightarrow B$ platí, B neplatí. Závěr: A platí.

V našem případě postupně dostáváme:

$$\exists x \in \mathbb{R}^+\colon x + \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow x^2 + 1 < 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 < 0 \Rightarrow (x-1)^2 < 0.$$

2. Důkaz přímý

Schéma přímého důkazu:

Předpoklady: B platí, $B \Rightarrow A$ platí. Závěr: A platí.

Přímý důkaz výroku A je zpravidla náročnější než důkaz sporem. Není ale cílem tohoto článku se přímým důkazem podrobněji zabývat a proto hned přikročím k vlastnímu důkazu.
$\forall x \in \mathbb{R}^+$: $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow x +$ $+ \frac{1}{x} \geq 2$.

Nyní následuje skupina tří důkazů, které využívají známých nerovností mezi harmonickým, geometrickým a aritmetickým průměrem.

3. Aritmetický a geometrický průměr

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+\colon \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Položíme-li v předcházející nerovnosti $a = x$ a $b = \frac{1}{x}$, pak dostáváme: $\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \leq \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \Rightarrow 1 \leq \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$.

4. Aritmetický a harmonický průměr

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+\colon \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}.$$

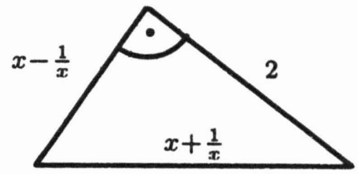
Položíme-li v předcházející nerovnosti $a = x$ a $b = \frac{1}{x}$, pak dostáváme: $\frac{2}{x+\frac{1}{x}} \leq \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \Rightarrow \frac{2}{x+\frac{1}{x}} \leq \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4 \Rightarrow x +$ $+ \frac{1}{x} \geq 2, x \in R^+$.

5. Geometrický a harmonický průměr

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+\colon \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}.$$

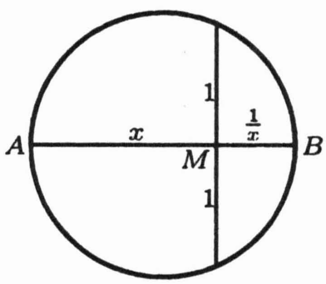
Položíme-li v předcházející nerovnosti $a = x$ a $b = \frac{1}{x}$, pak dostáváme: $\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \leq \frac{2}{x+\frac{1}{x}} \Rightarrow 1 \leq \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$.

6. Pythagorova věta



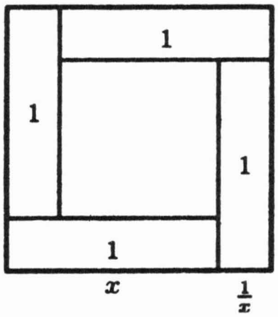
Uvažujme kladná reálná čísla $x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$, 2. Zřejmě je $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 4$. Číslo $x+\frac{1}{x}$ je velikost přepony v pravoúhlém trojúhelníku, jehož jedna odvěsna má velikost 2. Proto platí $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

7. Tětivy kružnice



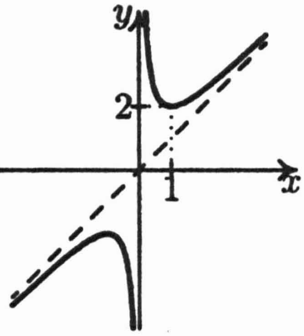
Nechť je dána úsečka AB taková, že $|AB| = x + \frac{1}{x}$. Na úsečce AB zvolíme bod M tak, aby platilo $|AM| = x$ a $|BM| = \frac{1}{x}$. Sestrojme kružnici s průměrem AB a bodem M veďme tětivu kružnice kolmou na AB. Délka této tětivy je zřejmě 2, jak plyne z Eukleidovy věty o výšce. Nejdelší tětivou je průměr a proto platí $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Rovnost nastane v případě $x = \frac{1}{x}$.

8. Obsah čtverce



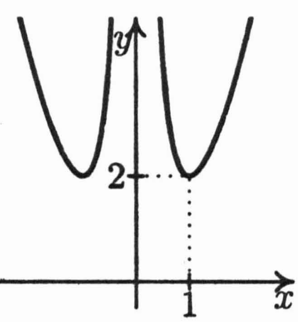
Nechť je dán čtverec o straně velikosti $x + \frac{1}{x}$. Obsah tohoto čtverce je $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$. Čtverec rozdělíme na čtyři obdélníky o stranách velikosti x a $\frac{1}{x}$ a čtverec o straně velikosti $x - \frac{1}{x}$ tak, jak je uvedeno na obr. 3. Ihned vidíme, že obsah čtverce je aspoň 4, tedy platí $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \geq 4$. Odtud už plyne, že $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

9. Lokální extrém funkce



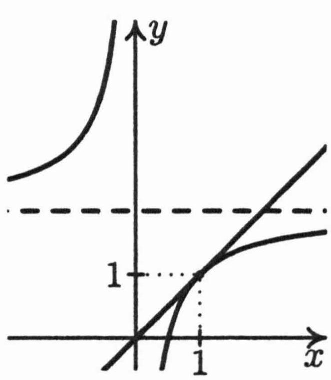
Uvažujme funkci $f: y = x + \frac{1}{x}$. Pro první a druhou derivaci této funkce postupně dostáváme $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$. Snadno se můžeme přesvědčit, že funkce f nabývá v intervalu $(0; +\infty)$ lokálního minima v bodě 1. Jeho hodnota je $f(1) = 2$. To ale také znamená, že pro všechna kladná reálná čísla je $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$.

10. Lokální extrém funkce



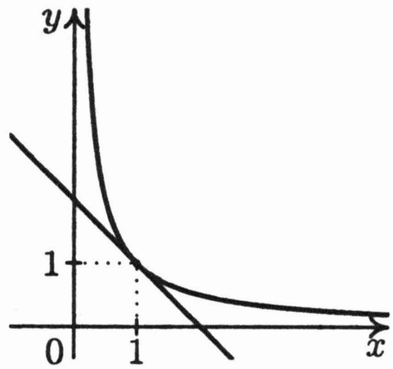
Nechť je dána funkce $f: y = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Pro první a druhou derivaci funkce f dostáváme $y' = 2x - 2\frac{1}{x^3}$, $y'' = 2 + \frac{6}{x^2}$. Funkce f nabývá v intervalu $(0; +\infty)$ lokálního minima v bodě 1. Jeho hodnota je $f(1) = 2$. Pro všechna kladná reálná čísla je $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$. Poslední nerovnost lze upravit následovně $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4$. Odtud už plyne $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

11. Tečna



Jsou dány funkce $f: y = x$ a $g: y = 2 - \frac{1}{x}$. Rovnice $f(x) = g(x)$ má právě jeden kořen $x = 1$, tj. $f(1) = g(1)$. Lze snadno ukázat, že přímka $y = x$ je tečnou grafu funkce g v bodě $T[1; 1]$. Protože $g''(x) = -\frac{2}{x^3}$ a pro každé kladné reálné číslo x je $g''(x) < 0$, je funkce g konkávní v $\mathbb{R}^+$. To ale znamená, že graf funkce g „leží pod tečnou“ a proto platí $g(x) \leq f(x)$ resp. $2 - \frac{1}{x} \leq x$ pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ a tedy také $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

12. Tečna



Jsou dány funkce $f: y = 2 - x$ a $g: y = \frac{1}{x}$. Rovnice $f(x) = g(x)$ má právě jeden kořen $x = 1$, tj. $f(1) = g(1)$. Lze snadno ukázat, že přímka $y = 2 - x$ je tečnou grafu funkce g v bodě $T[1;1]$. Protože $g''(x) = \frac{2}{x^3}$ a pro každé kladné reálné číslo x je $g''(x) > 0$, je funkce g konvexní v $\mathbb{R}^+$. To ale znamená, že graf funkce g „leží nad tečnou" a proto platí $g(x) \geq f(x)$ resp. $\frac{1}{x} \geq 2 - x$ pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ a tedy také $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Budu velice rád, když některý laskavý čtenář odhalí další důkazy této nerovnosti a oznámí je redakci našeho časopisu. Jsem si vědom toho, že pojem důkaz má svůj přesně vymezený obsah a rozsah a dovedu si představit řadu námitek proti některým zde uvedeným „důkazům". Z druhé strany předložený článek není jen o důkazech, ale chce také upozornit na *souvislosti* mezi algebrou, analýzou a gemoetrií. Na *souvislosti,* na které nebývá ve výuce matematiky na střední škole čas.

RNDr. Dag Hrubý
Gymnázium, A. K. Vítáka 452
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz