Zuzana Voglová
Grafy, matice a matroidy

Učitel matematiky, Vol. 14 (2006), No. 3, 139–146

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150730`

GRAFY, MATICE A MATROIDY

ZUZANA VOGLOVÁ

Úvod

Pojem matroid se v matematice vyskytuje už více než sedmdesát let. Přesto málokdo ví, co to matroidy jsou, v jaké oblasti matematiky se s matroidy vlastně můžeme setkat a k čemu je lze využít.

Teorie matroidů je částí diskrétní matematiky, která je úzce propojena s teorií grafů, se svazy, kódováním, projektivní geometrií a lineární algebrou. Matroidy mají velký význam pro kombinatorické optimalizace a jejich aplikace v elektroinženýrství a statice.

Z historie matroidů

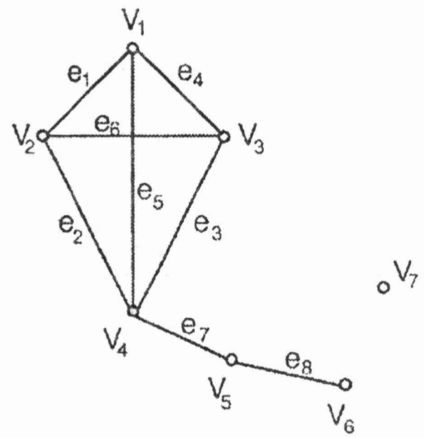
Samotný pojem matroid zavedl americký matematik *Hassler Whitney*[1], který se zabýval teorií grafů, topologií a maticemi. Při studiu grafů a matic si všiml některých společných vlastností systémů hran v grafech a sloupců v maticích. Ty popsal v článku [3] v roce 1936. V tomto článku dále popsal celou řadu vlastností matroidů, vztahy mezi matroidy a maticemi a mezi matroidy a grafy.

Než ukážeme některé společné vlastnosti hran v grafech a sloupců v maticích, připomeňme si několik pojmů z teorie grafů. *Graf* se skládá z uzlů a hran. Je-li množina uzlů konečná, říkáme, že graf je *konečný*. *Uzly* si můžeme představit jako malé kroužky v rovině

[1] Whitney se narodil v roce 1907 v New Yorku, v roce 1928 absolvoval na univerzitě v Yale. Na Harvardu v roce 1932 získal doktorát, disertaci *The Coloring of Graphs* napsal pod vedením G. D. Birkhoffa. V roce 1946 byl jmenován řádným profesorem na Harvardu, kde působil až do roku 1952. V roce 1977 odešel do důchodu a roku 1989 zemřel ve Švýcarsku.

a *hrany* jako spojnice mezi nimi. Jestliže je uzel u koncovým bodem hrany h, říkáme, že je s hranou h *incidentní*. *Stupeň uzlu* u je číslo označující počet hran, které jsou s uzlem u incidentní. Uzel, jehož stupeň je roven nule, se nazývá *izolovaný*. *Nulovým grafem* rozumíme graf, který neobsahuje žádnou hranu ani uzel.

Na obrázku 1 je graf, který se skládá z uzlů $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7$ a hran $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8$. Nejvyšší stupeň má uzel V_4 – stupeň 4. Uzly V_1, V_2, V_3 mají stupeň 3, uzel V_5 má stupeň 2, uzel V_6 má stupeň 1, uzel V_7 je izolovaný.



Obr. 1

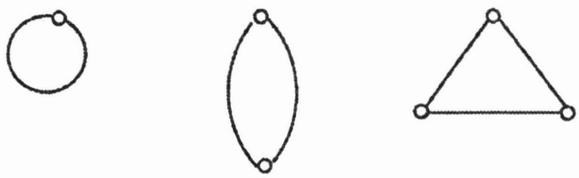
Hrany v grafu mohou být „orientovány“, tj. je vyznačen směr, od kterého uzlu ke kterému příslušná hrana vede. V některých grafech mohou být dva uzly spojeny více než jednou hranou, mluvíme o tzv. *násobných hranách*. Někdy také připouštíme v grafu tzv. *smyčky*, tj. hrany vedoucí z uzlu do sebe samotného. My budeme v dalším grafem rozumět neorientovaný konečný graf, který může obsahovat násobné hrany i smyčky. Přiřadíme-li každé hraně reálné číslo (tzv. *ohodnocení hrany*), získáme tzv. *ohodnocený graf*.

Podgraf G' grafu G je graf, který obsahuje některé hrany grafu G a uzly, které jsou s těmito hranami incidentní. Graf nazýváme *souvislý*, jestliže jsou každé dva uzly tohoto grafu propojeny posloupností hran. V opačném případě se graf nazývá *nesouvislý*.

Graf na obrázku 1 je nesouvislý. Pokud bychom z tohoto grafu odstranili uzel V_7, získali bychom graf souvislý.

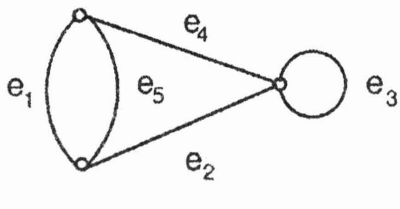
Část grafu na obrázku 1, která se skládá z uzlů V_1, V_2, V_3, V_4 a hran e_1, e_2, e_3, e_4, je příkladem tzv. *kružnice.* Počet uzlů v kružnici nazýváme její *délkou.*

Protože jsme pro účely tohoto článku povolili násobné hrany i smyčky, připouštíme i kružnice délek 1 a 2. Na obrázku 2 je jsou kružnice délek 1, 2 a 3.



Obr. 2

Souvislý graf, který neobsahuje jako podgraf žádnou kružnici, se nazývá *strom. Kostrou grafu G* rozumíme takový souvislý podgraf grafu G, který obsahuje všechny uzly grafu G a neobsahuje jako podgraf žádnou kružnici.



Obr. 3

Říkáme, že podgraf grafu je *nezávislý,* jestliže neobsahuje kružnici. Množina hran nezávislého podgrafu se nazývá *nezávislá.* Například množina I všech nezávislých množin grafu G z obrázku 3 je množina

$$\{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_5\}, \{e_2, e_4\}, \{e_2, e_5\}, \{e_4, e_5\}\}.$$

Nezávislé množiny hran každého grafu splňují následující tři vlastnosti:

(I1) Prázdná množina je nezávislá.

(I2) Jestliže je množina X nezávislá a $Y \subseteq X$, potom také Y je nezávislá.

(I3) Jestliže U, V jsou nezávislé množiny takové, že $|U| < |V|$ (kde $|U|$ značí počet prvků množiny U), potom existuje prvek $x \in V - U$ takový, že $U \cup \{x\}$ je nezávislá množina.

Množiny vytvořené z hran grafu G, které nejsou nezávislé, nazýváme *závislé*; množinu všech závislých množin označíme D. Pro graf G je $D = \{\{e_3\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_3, e_4\}, \{e_3, e_5\}\} \cup \cup \{X \subseteq E; | X | \geq 3\}$. Množinu minimálních (vzhledem k inkluzi) závislých množin označíme $\mathcal{C}$. Jde o ty množiny hran, které vytvoří v grafu G kružnici a neobsahují žádnou hranu, která by do této kružnice nepatřila. Pro graf G je tedy $\mathcal{C} = \{\{e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_2, e_5\}, \{e_2, e_4, e_5\}\}$. Je zřejmé, že platí:

(C1) prázdná množina není závislá,

(C2) jsou-li C_1, C_2 minimální závislé množiny a $C_1 \subseteq C_2$, potom $C_1 = C_2$.

Dále platí:

(C3) jsou-li C_1, C_2 minimální závislé množiny takové, že $C_1 \neq C_2$ a $e \in C_1 \cap C_2$, potom existuje minimální závislá množina C_3 taková, že $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

Maximálním nezávislým množinám říkáme *báze.* (Jsou to ty nezávislé množiny, k nimž už nelze přidat žádný prvek navíc, aby zůstaly nezávislé.)

Podobné vlastnosti jako jsme popsali u hran grafu, můžeme najít i u sloupců v matici. Připomeňme si, že *maticí* rozumíme obdélníkovou či čtvercovou tabulku prvků nějaké množiny. Dále budeme mluvit pouze o maticích reálných čísel.

Sloupce matice mohou být lineárně závislé nebo lineárně nezávislé. Pokud je některý sloupec lineární kombinací jiných sloupců, říkáme, že jsou tyto sloupce *lineárně závislé.* V opačném případě se nazývají *lineárně nezávislé.* Uvažujme matici A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

její sloupce označíme c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. Množina lineárně nezávislých sloupců matice se nazývá *nezávislá*.

Je-li dána matice, množinu všech jejích nezávislých množin označíme I. Snadno se lze přesvědčit, že množina I pro výše uvedenou matici A vypadá takto:

$$\{\emptyset, \{c_1\}, \{c_2\}, \{c_4\}, \{c_5\}, \{c_1, c_2\}, \{c_1, c_5\}, \{c_2, c_4\}, \{c_2, c_5\}, \{c_4, c_5\}\}$$

a zřejmě splňuje vlastnosti (I1) – (I3). Ostatní množiny vytvořené ze sloupců matice A jsou závislé.

Těchto a dalších podobných vlastností si všiml pravděpodobně i Whitney a proto se pokusil vytvořit nějakou obecnější matematickou strukturu, která by všechny tyto vlastnosti splňovala. Tuto novou strukturu nazval matroidem.

Základní pojmy a vlastnosti matroidů

Matroidem rozumíme uspořádanou dvojici (E,I), kde E je konečná množina a I je množina podmnožin množiny E splňující vlastnosti (I1) – (I3). Množinu E nazýváme *základní množinou* matroidu. Matroidy lze definovat několika různými, avšak ekvivalentními způsoby. K jejich definování lze kromě nezávislých množin použít také kružnice, báze, závislé množiny a další.

Matroid tedy můžeme vytvořit z grafu (resp. matice) následovně. Základní množinu matroidu tvoří všechny hrany daného grafu (resp. sloupce dané matice). Množinu I potom tvoří nezávislé množiny grafu (resp. množina lineárně nezávislých sloupců matice).

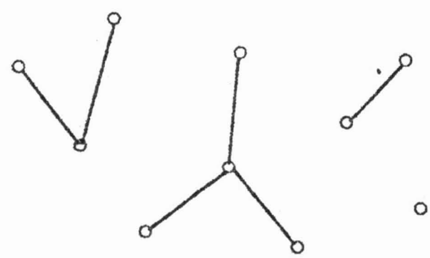
Matice A a graf G uvedené dříve, byly voleny tak, aby matroidy z nich vytvořené, byly izomorfní (matroidy M_1 a M_2 jsou izomorfní, jestliže mezi základními množinami matroidů existuje taková bijekce φ, že pro každou množinu $X \subseteq E(M_1)$ platí: $\varphi(X)$ je nezávislá v M_2 právě tehdy, když je X nezávislá v M_1).

Whitney v již zmiňovaném článku popsal celou řadu vlastností, které matroidy splňují. Na Whitnyho dále navazovali například S. MacLane, G. Birkhoff, B. L. van der Waerden, R. Rado a další.

Užití matroidů

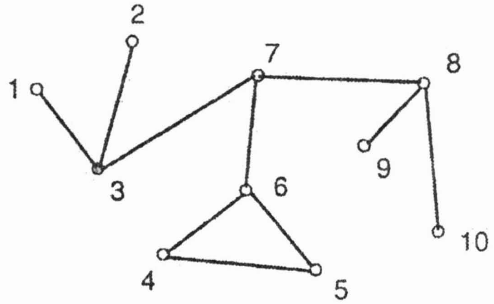
Teď už tedy víme, co jsou to matroidy. A k čemu je lze využít? Z mnoha různých využití si ukažme jedno, které se vztahuje k teorii grafů. Představme si následující problém: máme deset měst, která chceme propojit kabelovou sítí. Naším úkolem je vybudovat kabelovou síť tak, aby každá dvě města byla propojena. Známe náklady na propojení každé dvojice měst a požadujeme, aby vybudovaní sítě bylo co nejlevnější.

Jak přistoupíme k řešení tohoto problému? Jednotlivá města znázorníme jako uzly grafu a hrany tohoto grafu budou představovat kabelové spojení. Náklady na vybudování kabelové sítě mezi jednotlivými městy budou odpovídat ohodnocení hran. Jak tedy bude vypadat řešení? Určitě ne tak, jak je uvedeno na obrázku 4.



Obr. 4

Na tomto obrázku totiž nejsou všechna města vzájemně propojena. V terminologii teorie grafů to znamená, že graf není souvislý. Hledanému řešení neodpovídá ani graf na obrázku 5.



Obr. 5

Některé hrany jsou v tomto grafu zbytečné. Například mezi městy 4, 5 a 6 jsou tři hrany. Přitom postačí jen dvě z těchto tří hran a takové řešení jistě bude „levnější". Hledáme graf, který bude souvislý a nebude obsahovat žádnou kružnici, tedy hledáme strom.

Ze zadání příkladu je zřejmé, že v grafu na 10 uzlech hledáme kostru, jejíž součet ohodnocení je co nejmenší. Hledáme tzv. *minimální* nebo také *nejlacinější* kostru.

Na první pohled by se mohlo zdát, že je daná úloha triviální. Počet koster v grafu na 10 uzlech jistě bude konečný. Vypíšeme tedy všechny kostry, spočteme součty jejich ohodnocení a vybereme tu kostru, jejíž ohodnocení bude minimální. Jenže skutečnost je komplikovanější. Již v roce 1899 dokázal anglický matematik Cayley, že počet koster v úplém grafu (což je graf, kdy je každý uzel propojen hranami se všemi ostatními) na n uzlech je roven číslu n^{n-2}. V našem případě tedy dostáváme 100 000 000 různých koster. V případě 100 měst už získáváme 100^{98} koster, což přesahuje možnosti i těch nejvýkonnějších počítačů. I kdybychom měli počítač, který projde milión koster za sekundu, vyhledání všech koster by mu trvalo 10^{188} sekund. Vzhledem k tomu, že stáří našeho vesmíru je přibližně $1{,}5 \cdot 10^{17}$ sekund, ztratí naděje i ti největší optimisté.

Je tedy zřejmé, že ke hledání minimální kostry potřebujeme znát vhodný algoritmus, který celý proces urychlí. Algoritmů pro hledání minimální kostry v grafu existuje mnoho. (První algoritmus nalezl už v roce 1926 O. Borůvka). Nyní si ukážeme tzv. *hladový algoritmus*. Jednoduše bychom ho mohli popsat slovy „ber to nejlepší, dokud se dá". Možná z tohoto důvodu je algoritmus někdy také nazýván *algoritmem hamouna*.

Při hledání minimální kostry postupujeme takto: nejprve seřadíme hrany grafu do neklesající posloupnosti podle jejich ohodnocení; získáme posloupnost $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$. Hrana h_1 bude patřit do kostry. Je-li hrana h_i součástí kostry, vezmeme hranu h_{i+1} a zjistíme, zda by jejím přidáním do kostry vznikla kružnice. Pokud ne, přidáme ji do kostry. Do kostry tedy budou patřit jen ty hrany, které v ní nevytvoří kružnici. Máme-li spojeny všechny uzly, jsme hotovi, získali jsme minimální kostru v grafu. Pokud jsme měli graf na n uzlech, bude kostra obsahovat $n - 1$ hran.

Popsaným způsobem skutečně získáme minimální kostru v grafu. Že jsme získali kostru, je evidentní. Dokázat, že jde o kostru minimální, není v rámci teorie grafů snadný úkol. Jednoduše však lze tento důkaz získat právě pomocí teorie matroidů.

Teorie matroidů je jednou z nejrychleji se rozvíjejících částí diskrétní matematiky a nachází uplatnění v celé řadě matematických disciplín.

Literatura

[1] Fuchs, E., *Diskrétní matematika pro učitele*, Masarykova univerzita, Brno, 2001.

[2] Oxley, J., *Matroid Theory*, Oxford University Press Inc., New York,, 1992.

[3] Whitney, H., *On the abstract properties of linear dependence*, American Journal of Mathematics, 1936.

Mgr. Zuzana Voglová
doktorandka Katedry matematiky PřF MU
Janáčkovo nám. 2a
602 00 Brno
e-mail: zuzana.voglova@foxis.cz