Renáta Ujháziová
Strapec problémov a otočenie (2)

Učitel matematiky, Vol. 14 (2006), No. 2, 77–90

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150715`

STRAPEC PROBLÉMOV A OTOČENIE (2)

RENÁTA UJHÁZIOVÁ

Dokončení z minulého čísla

Problém 2: Dané sú dve rovnobežné priamky a, b a mimo nich bod C. Zostrojte všetky rovnoramenné trojuholníky ABC so základňou AB a uhlom veľkosti $55°$ pri vrchole A tak, aby $A \in a$ a $B \in b$.

Riešenie:

Dané: a, b, $a||b$, C, $C \notin a$, $C \notin b$

Hľadané: rovnoramenný ABC so základňou AB a uhlom veľkosti $55°$ pri vrchole A

Podmienka: $A \in a$, $B \in b$

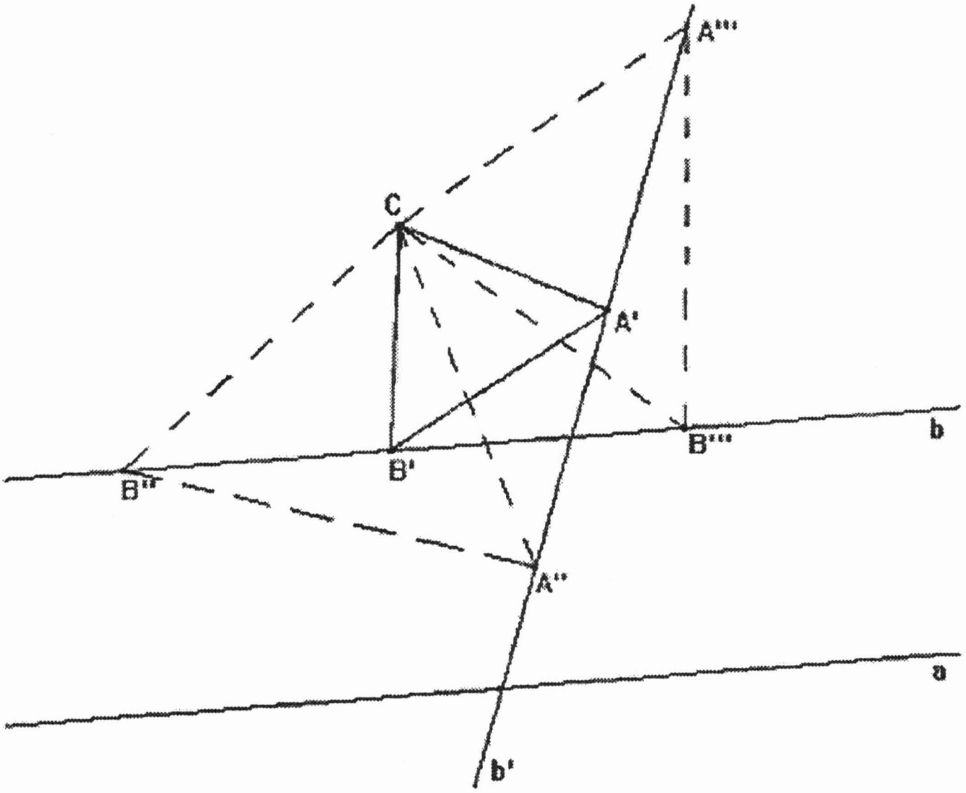
Z vlastnosti rovnoramenného trojuholníka ABC vyplýva:

$$|AC| = |BC|, \quad |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = 55°, \quad |\sphericalangle ACB| = 70°.$$

Úlohu budeme riešiť pomocou ***stratégie vypustenia podmienok***. Vypustíme napr. podmienku $A \in a$, pričom všetky ostatné podmienky problému zachováme.

Experimentovaním sa pokúsime zistiť, na akej množine bodov budú ležať body A', A'', A''', ... v prípade, že všetky ostatné podmienky problému zachováme. Po zostrojení niekoľkých pomocných rovnoramenných trojuholníkov spĺňajúcich požadované vlastnosti dospejeme k záveru, že body A', A'', A''', ... ležia na priamke. Bod A' je obrazom bodu B' v otočení okolo bodu C o uhol $70°$, rovnako ako aj A'' je obrazom bodu B'' v tom istom zobrazení, atď. ..., a teda body A', A'', A''', ... ležia na priamke (označme ju b'), ktorá je obrazom priamky b v spomínanom otočení (viď obr. 3a). Teda aj hľadaný bod A leží na priamke b' a zároveň má ležať aj na priamke a. Nájdeme ho v priesečníku týchto dvoch priamok. Zobrazením bodu A v $R(C, -70°)$ získame bod B.

Poznámka: Na hodine by rozbor daného problému prebiehal analogicky, ako sme to uviedli pri základnom probléme.

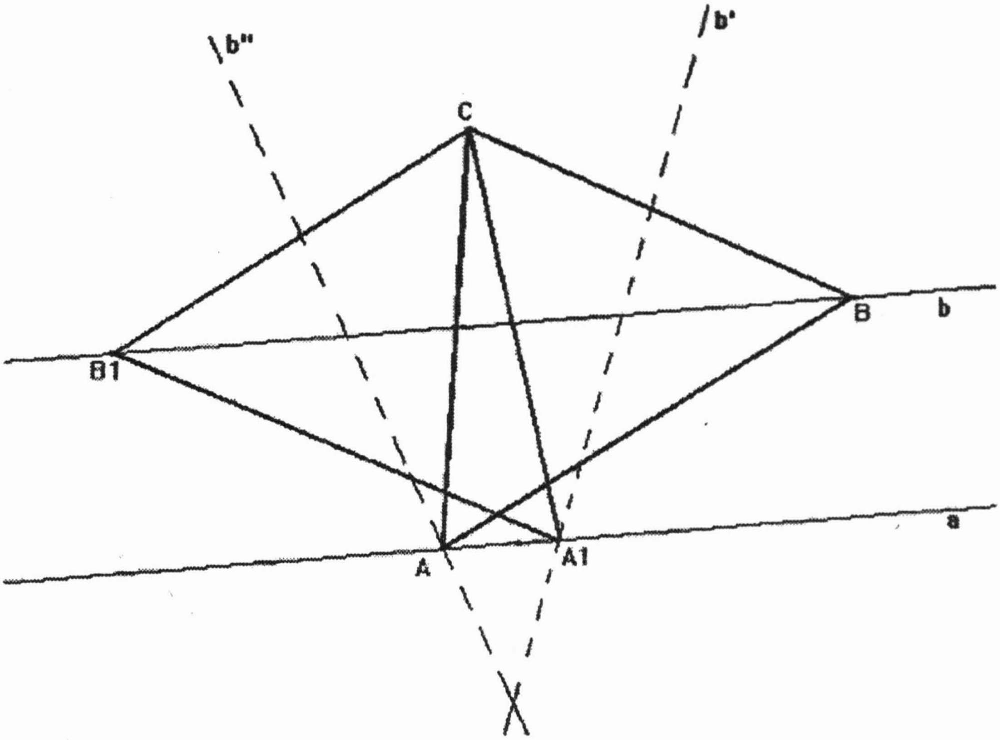


Obr. 3a

Konštrukciu môžeme zapísať nasledovne:

1. a, b, $a||b$, C, $C \notin a$, $C \notin b$
2. b'; $R(C,\ 70°)$: $b \to b'$
3. A, $A \in a \cap b'$
4. B, $R(C,\ -70°)$: $A \to B$
5. $\triangle ABC$

Pretože priamku b môžeme otočiť aj v smere hodinových ručičiek, tj. o $-70°$, riešením úlohy je aj trojuholník A_1B_1C (viď obr. 3b). Z riešenia je zrejmé, že počet riešení problému závisí od vzájomnej polohy priamok b', a a b'', a. Keďže pre $a||b$ platí, že $b' \nparallel a$, $b'' \nparallel a$, tak úloha má vždy dve riešenia.

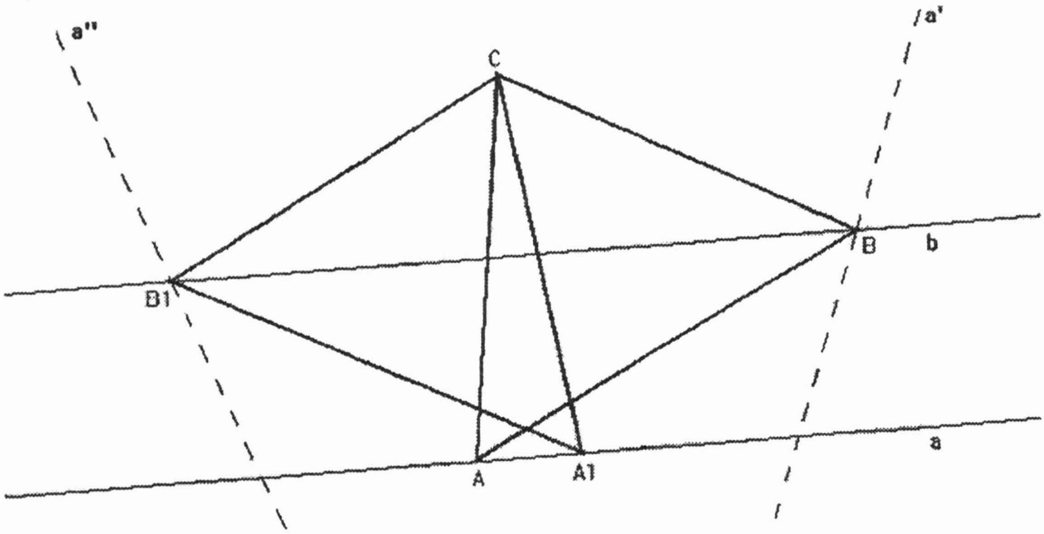


Obr. 3b

Učiteľ: Je možné nájsť hľadané rovnoramenné trojuholníky aj iným spôsobom? Ak áno, ako?

Očakávaná odpoveď: Úlohu môžeme riešiť aj vypustením podmienky $B \in b$. V tom prípade by sme hľadali množinu bodov, na ktorej ležia body B', B'', B''', ... Zistili by sme, že všetky tieto body ležia na priamke, ktorá je obrazom priamky a (označme ju a') v otočení okolo bodu C o uhol $70°$. Hľadaný bod B preto nájdeme ako priesečník priamok b a a'. Otočením bodu B okolo bodu C o uhol $-70°$ dostaneme hľadaný bod A. Druhé riešenie úlohy nájdeme otočením priamky a v opačnom smere o rovnako veľký uhol.

Poznámka: Žiaci sa vďaka uvedenej stratégii riešenia mohli opäť presvedčiť, že je jedno, či zobrazíme priamku a alebo priamku b v $R(C, \pm 70°)$, pretože v oboch prípadoch dospejeme k takému istému riešeniu (viď obr. 3c).



Obr. 3c

Ak by sme teraz modifikovali ***zadané prvky*** problému 2 a priamku a by sme nahradili kružnicou k, pričom všetky ostatné prvky problému 2 by zostali nezmenené, ďalší problém strapca by sme mohli sformulovať takto:

Problém 3: Daná je priamka b, kružnica $k\,(S,r)$ a mimo nich bod C. Zostrojte všetky rovnoramenné trojuholníky ABC so základňou AB a uhlom veľkosti 55° pri vrchole A tak, aby $A \in k$ a $B \in b$.

Poznámka: Problém 3 je podobný úlohe 3.53 na strane 151 v [3].

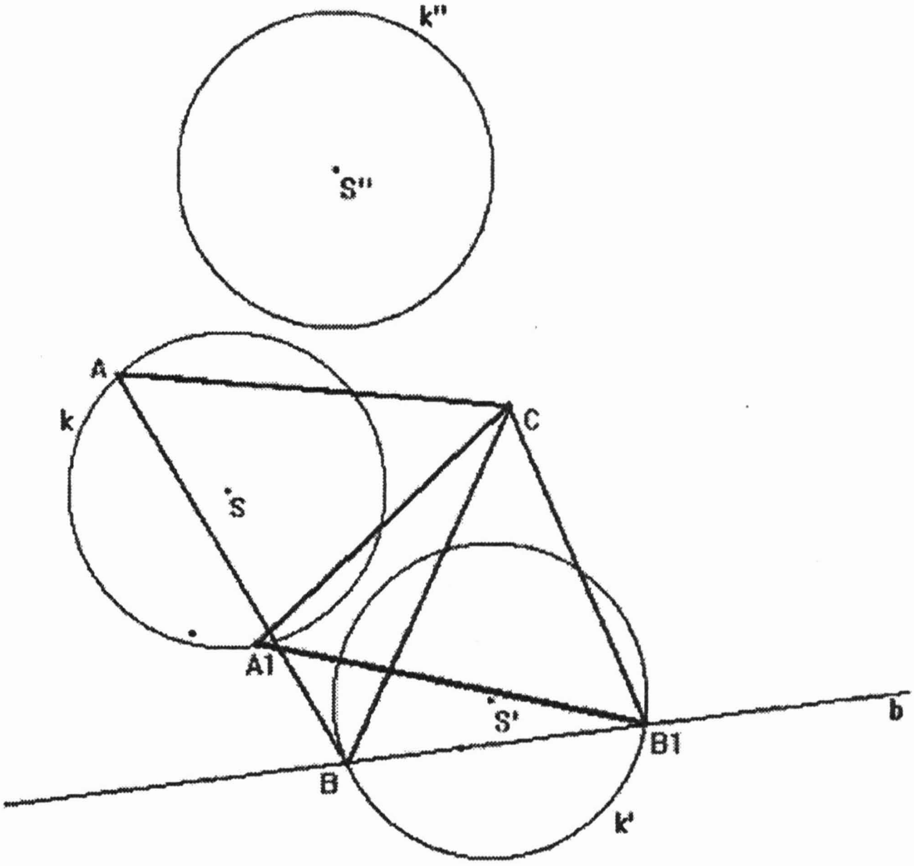
Riešenie:
Dané: b, $k\,(S,r)$, C, $C \notin b$, $C \notin k$
Hľadané: rovnoramenný ABC so základňou AB a uhlom veľkosti 55° pri vrchole A
Podmienka: $A \in k$, $B \in b$

Z vlastnosti rovnoramenného trojuholníka ABC vyplýva:

$$|AC| = |BC|, \quad |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = 55°, \quad |\sphericalangle ACB| = 70°.$$

Pri riešení tejto úlohy už môžeme dať žiakom voľnosť pri navrhovaní postupu riešenia. Ak nebudú mať nijaký „užitočný“ nápad, odporúčame úlohu tentokrát riešiť vypustením podmienky $B \in b$.

To znamená, že budeme hľadať množinu všetkých bodov, na ktorých budú ležať body B', B'', B''', ... Experimentovaním dospejeme k záveru, že tieto body ležia na kružnici, ktorá je obrazom kružnice k v otočení okolo bodu C o uhol $70°$, resp. o uhol $-70°$. Ďalší postup je už analogický s postupmi uvedenými v predchádzajúcich problémoch. Počet riešení však tentokrát závisí od počtu priesečníkov obrazov kružnice k a priamky p. Jedno z možných prípadov riešenia je znázornené na obrázku 4.



Obr. 4

Poznámka: Žiaci zvyčajne po nájdení dvoch bodov vyslovia hypotézu, že body B', B'', B''', ... ležia na priamke. Treba ich však viesť k tomu, aby overili, či aj ďalšie zostrojené body budú skutočne ležať na priamke. Riešenie tohto problému vypustením podmienky $B \in b$ je náročnejšie, ako ho riešiť vypustením podmienky $A \in k$. Myslíme si však, že je dôležité, aby sa žiaci takýmto spôsobom sami utvrdili v tom, že obrazy bodov, ktoré ležia na kružnici, ležia tiež na kružnici. Formálne totiž žiaci vedia povedať, že obrazom kružnice v otočení je kružnica. Pri riešení konkrétnych úloh sa ale ukazuje, že tento poznatok je často krát skutočne len formálny.

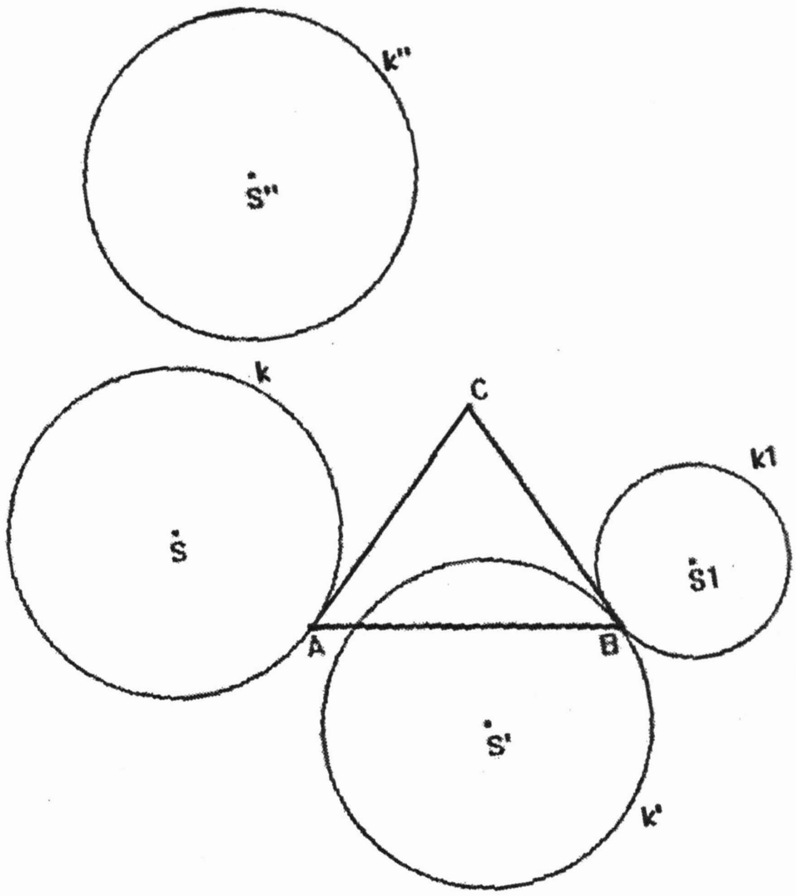
Po zostrojení hľadaného trojuholníka odporúčame položiť žiakom otázku, či je možné postupovať pri riešení úlohy aj iným spôsobom. Žiaci by mali na základe riešení predchádzajúcich problémov prísť na to, že úlohu je možné riešiť aj vypustením podmienky $A \in k$, inak povedané otočením priamky b okolo bodu C o uhol $70°$, resp. o uhol $-70°$.

Po vyriešení problému 3 by už žiaci mali vedieť, že metóda riešenia použitá v probléme 2 a 3 je rovnaká. Preto, pokiaľ v probléme 3 priamku b nahradíme kružnicou k_1, bez väčších ťažkostí by mali byť žiaci schopní dospieť k záveru, že metóda riešenia zadaného problému je taká istá, ako to bolo v predchádzajúcich dvoch problémoch. Formulácia problému 4 by bola nasledujúca:

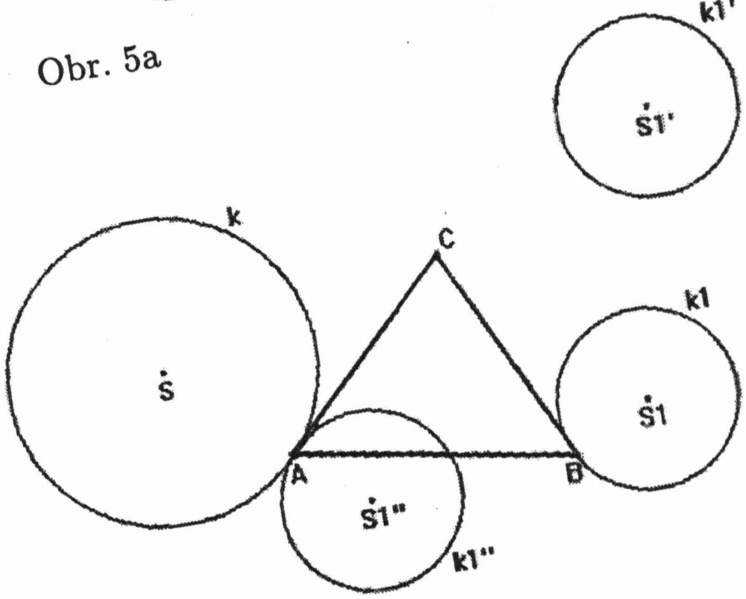
Problém 4: Dané sú dve nesústredné kružnice $k(S, r)$, $k_1(S_1, r_1)$, $r \neq r_1$, a bod C. Zostrojte všetky rovnoramenné trojuholníky ABC so základňou AB a uhlom veľkosti $55°$ pri vrchole A tak, aby $A \in k$ a $B \in k_1$.

Pokiaľ usúdime, že je ešte stále potrebné úlohu riešiť výskumným prístupom, tak opäť vypustíme niektorú z podmienok $A \in k$ alebo $B \in k_1$ a nájdeme množinu bodov, na ktorých budú ležať body A', A'', A''', ..., resp. body B', B'', B''', ... Ďalší postup je už analogický s postupom uvedeným vyššie.

Podľa našich skúseností však túto úlohu žiaci dokážu vyriešiť aj bez použitia stratégie vypustenia podmienky. Na základe riešení predchádzajúcich problémov už vedia, že stačí buď otočiť kružnicu k okolo bodu C o uhol $70°$, resp. o uhol $-70°$. V tomto prípade bod B nájdeme ako priesečník kružníc k', resp. k'' a k_1 (jedno z možných riešení je uvedené na obr. 5a). Alebo stačí nájsť obraz kružnice k_1 v otočení okolo bodu C o uhol $70°$, resp. o uhol $-70°$, pričom v priesečníku kružníc k_1', resp. k_1'' a k nájdeme hľadaný bod A (viď obr. 5b). Počet riešení úlohy závisí od počtu priesečníkov jednotlivých kružníc.



Obr. 5a



Obr. 5b

V tejto chvíli by už žiaci mali vedieť, že metóda riešenia, v centre ktorej je otočenie, nezávisí od toho, aké dva počiatočné útvary zadávame. Preto pri vytváraní ďalších problémov strapca by sme mohli pokračovať napr. i ľubovoľnou voľbou dvoch zadaných útvarov. My sme sa však rozhodli pre také modifikácie zadaných a hľadaných prvkov, resp. podmienok problému 4, aby novovzniknuté problémy boli podobné, prípadne totožné s úlohami nachádzajúcimi v [3]. Nasledujúce dva problémy strapca preto vznikli len menšou zmenou ***daných*** a ***hľadaných prvkov*** predchádzajúceho problému. Aj tým sme chceli ilustrovať, ako je možné príklady z učebníc využiť pri tvorbe strapca problémov. Inými slovami povedané, ukázať, že aj z izolovaných úloh, resp. problémov z učebníc je možné vytvoriť neizolované úlohy.

Problém 5:
Dané sú dve nesústredné kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, $r_1 \neq r_2$, **ktoré sa pretínajú v bodoch C, Q. Zostrojte všetky rovnoramenné trojuholníky ABC so základňou AB, pre ktoré platí $A \in k_1$, $B \in$ $\in k_2$, $|\sphericalangle ACB| = 120°$. (viď [3] úloha 3.54 na strane 151)**

Po ďalšej menšej zmene problému 4 môžeme formulovať nasledovný problém takto:

Problém 6:
Dané sú dve sústredné kružnice k_1 $(S, 4$ cm$)$, k_2 $(S, 3$ cm$)$ a bod C $(|SC| = 2$ cm$)$. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky ABC tak, aby $A \in k_1$ a $B \in k_2$.
Poznámka: Problém 6 je veľmi podobný úlohe 3.51a na strane 151 v [3].

Ak by sme teraz v probléme 6 pozmenili len ***hľadaný prvok*** a napríklad namiesto rovnostranného trojuholníka ABC by sme mali zostrojiť štvorec $ABCD$, dostaneme ďalší problém strapca.

Problém 7:
Dané sú dve sústredné kružnice k_1 $(S, 4$ cm$)$, k_2 $(S, 3$ cm$)$ a bod C $(|SC| = 2$ cm$)$. Zostrojte všetky štvorce $ABCD$ tak, aby $B \in k_1$ a $D \in k_2$.
Poznámka: Problém 7 je skoro totožný s úlohou 3.51b na strane 151 v [3].

V prípade, že sa vrátime naspäť k základnému problému a zadané vstupné prvky nahradíme štvorcom, ďalším problémom strapca by mohol byť problém 8.

Problém 8: Do štvorca $KLMN$ so stranou k vpíšte rovnostranný trojuholník ABC tak, bod B ležal na strane LM, bod A ležal na strane KL, $|KA| : |AL| = 1 : 2$, a bod C ležal na strane KN.

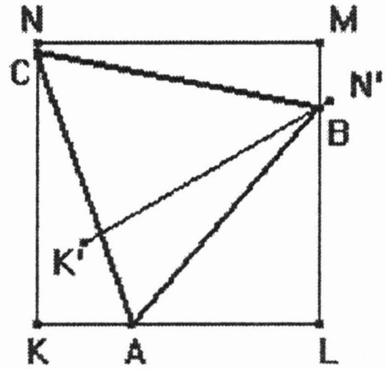
Riešenie:

Dané: $\square KLMN$ so stranou k

Hľadané: rovnostranný $\triangle ABC$

Podmienka: $A \in KL$, $|KA| : |AL| = 1 : 2$, $B \in LM$, $C \in KN$.

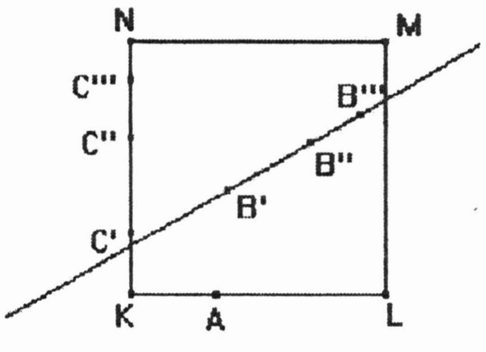
Ak žiaci nevidia hneď, že kľúčom k nájdeniu hľadaného rovnostranného trojuholníka je otočenie strany KN alebo strany LM okolo bodu A o uhol $-60°$, resp. $60°$, tak odporúčame riešiť úlohu stratégiou vypustenia podmienok. Vypustime napr. podmienku $B \in LM$ a budeme skúmať, na akej množine bodov budú ležať body B', B'', B''', ... za splnenia všetkých ostatných podmienok problému. Experimentovaním a nájdením vzťahu medzi bodmi B', B'', B''', ... a C', C'', C''', ... odhalíme, že hľadaná množina bodov nie je nič iné, ako obraz úsečky KN vo vyššie popísanom zobrazení. Bod B potom nájdeme ako priesečník strany LM a obrazu strany KN. Úloha má jedno riešenie (viď obr. 6a).



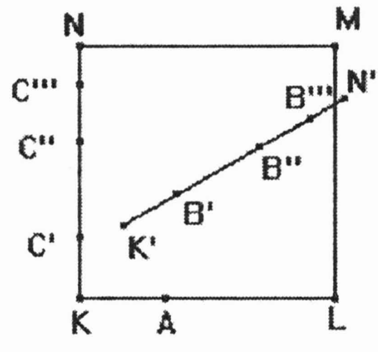
Obr. 6a

Poznámka: Pri tejto úlohe žiaci zvyčajne najprv vyslovia hypotézu, že body B', B'', B''', ... ležia na priamke (viď. obr. 6b). Až potom, čo si uvedomia, že body B', B'', B''', ... sú obrazmi bodov C', C'', C''', ... v otočení okolo bodu A o uhol $-60°$ a bod C

má ležať na úsečke KN, nie na priamke KN, určia presne hľadanú množinu bodov (viď obr. 6c).



Obr. 6b



Obr. 6c

Po vyriešení takto sformulovaného problému odporúčame modifikovať jeho podmienky nasledovne:

Problém 8': Do štvorca $KLMN$ so stranou k vpíšte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby bod A ležal na strane KL, $|KA| : |AL| = 1 : 2$, body B a C ležali na obvode štvorca $KLMN$.

Ak by žiaci nemali nijakú predstavu, ako by sa dal problém vyriešiť, tak ich môžeme naviesť na riešenie tejto úlohy celkom prirodzene, napríklad pomocou nejakého podobného dialógu:

Učiteľ: Čo znamená, že bod C má ležať na obvode štvorca? (Pozn. využijeme stratégiu riešenia z predchádzajúceho problému.)

Žiak: To znamená, že môže ležať na strane KL, LM, MN, KN.

Učiteľ: Správne. Takže ak by bod C ležal na strane KN, na akej množine bodov bude ležať bod B?

Žiak: Tak bod B leží niekde na obraze strany KN v otočení okolo bodu A o uhol $-60°$.

Učiteľ: Áno. Čo ak bod C leží na strane MN? Na akej množine bodov bude ležať bod B v tomto prípade?

Žiak: Na obraze strany MN v tom istom otočení ako strana KN.

Učiteľ: Presne tak. A kde bude ležať bod B v prípade, že C leží na strane LM?

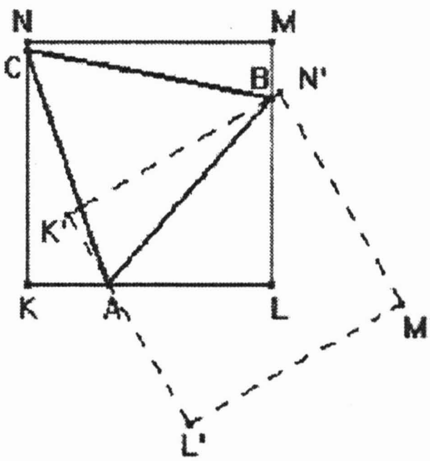
Žiak: Na obraze strany LM v otočení okolo bodu A o uhol $-60°$.

Učiteľ: A čo keď bude bod C ležať na strane KL?

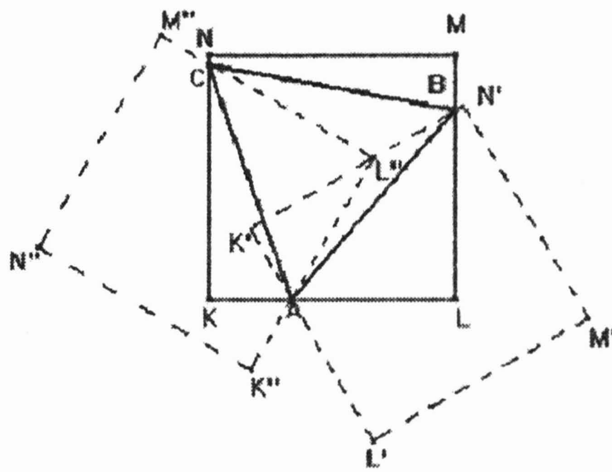
Žiak: V tom prípade bod B bude ležať na obraze strany KL v otočení okolo A o uhol $-60°$.

Učiteľ: Takže ak bod C má ležať na obvode štvorca $KLMN$, na akej množine bodov bude ležať bod M?
Žiak: Na obraze štvorca $KLMN$ v otočení okolo bodu A o uhol $-60°$.
Poznámka: Hoci uvedený dialóg nie je úplne presným popisom dialógu, ktorý prebehol na vyučovacej hodine, ale zachytáva postupnosť otázok a odpovedí, ktoré odzneli počas rozboru daného problému.

Úloha má jedno riešenie nezávisle od veľkosti strany k štvorca, ako aj od smeru otočenia štvorca $KLMN$ (viď obr. 7a a 7b).



Obr. 7a



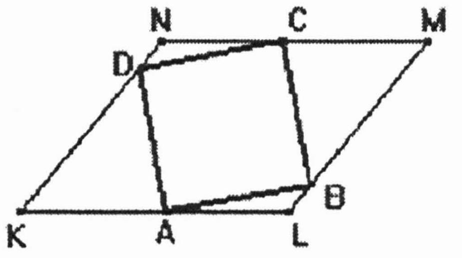
Obr. 7b

Obmenou daného a hľadaného prvku problému 8 môžeme vytvoriť ďalší problém zo strapca napríklad takto:

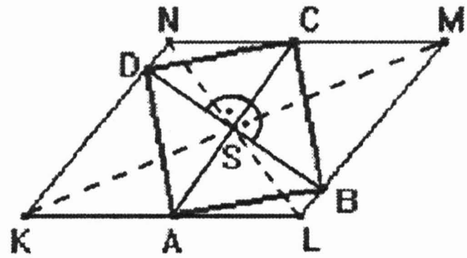
Problém 9:
Do daného rovnobežníka $KLMN$ vpíšte štvorec $ABCD$ tak, aby $A \in KL$, $B \in LM$, $C \in MN$ a $D \in KN$ (viď [3] úloha 3.50 na strane 151).
Riešenie:
Dané: rovnobežník $KLMN$ so stranami $a = 3$ cm, $b = 2{,}5$ cm
Hľadané: štvorec $ABCD$
Podmienka: $A \in KL$, $B \in LM$, $C \in MN$, $D \in KN$.

Úlohu tentokrát budeme riešiť stratégiou cesty späť.
Poznámka: Myslíme si, že pokiaľ žiaci správne pochopili metódu riešenia predchádzajúcich dvoch problémov, už nie je nutné použiť pri riešení tohto problému stratégiu vypustenia podmienok.

Budeme teda predpokladať, že úloha je vyriešená a do rovnobežníka je vpísaný štvorec $ABCD$ podľa zadaných podmienok (viď obr. 8a).



Obr. 8a



Obr. 8b

Stačí si uvedomiť, že stred rovnobežníka $KLMN$ je aj stredom štvorca $ABCD$ (označme ho S). Bod S je preto priesečníkom uhlopriečok štvorca $ABCD$. Z vlastností uhlopriečok štvorca potom plynie, že $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle CSD| = |\sphericalangle DSA| = 90°$ a $|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$ (viď obr. 8b).

Po odhalení uvedených vlastností môžeme pokračovať v spoločnom rozbore úlohy podobným dialógom:

Učiteľ: Aký je vzťah medzi vrcholmi štvorca A a B?
Žiak: ....
Učiteľ: Ako môžeme získať z bodu A bod B?
Žiak: Otočením bodu A do bodu B.
Učiteľ: Otočením bodu A okolo ktorého bodu a o koľko stupňov?
Žiak: Otočením bodu A okolo stredu rovnobežníka $KLMN$ o uhol 90°.
Učiteľ: Správne. Čo vieme ešte povedať o bode A okrem tejto vlastnosti?
Žiak: Bod A leží na strane KL rovnobežníka $KLMN$.
Učiteľ: Poznáme jeho presnú polohu?
Žiak: Nie.
Učiteľ: Ak vieme, že bod A leží niekde na úsečke KL a bod B je jeho obraz v otočení okolo bodu S o uhol 90°, vieme, na akej množine bodov bude ležať bod B?
Žiak: Na obraze úsečky KL v otočení $R(S, 90°)$.
Učiteľ: Áno. A čo ešte vieme povedať o polohe bodu B?

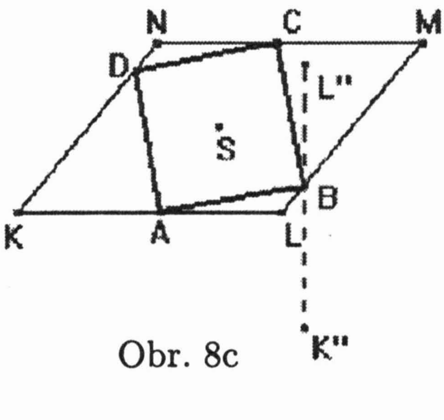
Žiak: Vieme, že bod B má ležať aj na strane LM rovnobežníka $KLMN$.
Učiteľ: Vieme určiť jeho presnú polohu?
Žiak: Áno. Bod B nájdeme v priesečníku úsečky LM a obrazu úsečky KL.
Učiteľ: Teraz, keď už poznáme presnú polohu bodu B, vieme nájsť bod A?
Žiak: Áno.
Učiteľ: Ako ho nájdeme?
Žiak: Otočením bodu B okolo bodu C o uhol $-90°$.
Učiteľ: Správne.

Poznámka: Pokiaľ sa rozhodneme túto časť rozboru úlohy robiť využitím stratégie vypúšťania podmienok, vypustime podmienky $B \in LM$, $C \in MN$, $D \in KN$ a zachováme len podmienku $A \in KL$. Zostrojili by sme niekoľko pomocných štvorcov, ktorých stred je stred rovnobežníka $KLMN$, a skúmali by sme, na akej množine bodov ležia vrcholy B týchto štvorcov. Dospeli by sme k záveru, že tieto vrcholy ležia na úsečke, ktorá je obrazom úsečky KL v otočení $R(S, 90°)$. Ďalší postup by už bol rovnaký s vyššie prezentovaným postupom.

Po nájdení vrcholov A, B hľadaného štvorca $ABCD$ by sme mohli v rozbore úlohy pokračovať napr. aj otázkou:

Učiteľ: Aký je vzťah medzi dvojicou bodov B, C; C, D a D, A?
Žiak: V $R(S, 90°)$ je bod C obrazom bodu B, bod D obrazom bodu C a bod A obrazom bodu D.

Ovšem zvyšné dva vrcholy štvorca môžeme zostrojiť aj využitím vlastností štvorca. Voľbu ďalšieho postupu konštrukcie už môžeme nechať na žiakov. Úloha má vždy jedno riešenie (viď obr. 8c).



Obr. 8c

Uvedený strapec problémov môže čitateľ rozšíriť o ďalšie viac či menej podobné problémy. Rovnako nemusí vo vyučovaní použiť presne všetky nami uvedené problémy, môže niektoré z nich vynechať alebo ich modifikovať. Uvedenú gradáciu obtiažnosti problémov by sme však odporučili zachovať, aby žiaci mali možnosť skutočne porozumieť metóde riešenia takýchto úloh a vedeli ju aj použiť pri riešení úloh takéhoto typu.

Záver

Cieľom článku bolo ilustrovať čitateľovi pozitíva použitia neizolovaných úloh, resp. problémov vo vyučovaní konštrukčných úloh s využitím otočenia a to, ako je možné využiť príklady a úlohy z učebníc pri tvorbe neizolovaných úloh. Zároveň sme chceli ukázať, že v článku uvedené typy úloh je možné riešiť aj pomocou stratégie vypustenia podmienok namiesto stratégie cesty späť. Naše doterajšie skúsenosti totiž ukazujú, že (minimálne) v počiatočnej fáze riešenia takýchto typov úloh je práve stratégia vypustenia podmienok pre žiakov prirodzenejšia a vedie k hlbšiemu porozumeniu metódy riešenia, a tým aj k vyššej úspešnosti žiakov pri riešení takýchto úloh.

Literatura

[1] Kopka, J., Hrozny problémů ve školské matematice, *Acta Universitatis Purkynianae,* Ústí nad Labem, 1999.

[2] Kopka, J., Výzkumný přístup při výuce matematiky, *Acta Universitatis Purkynianae,* Ústí nad Labem, 2004.

[3] Pomykalová, E., *Matematika pro gymnázia – Planimetrie,* Prometheus, Praha, 2001.

RNDr. Renáta Ujháziová
Ústav matematických vied PF UPJŠ,
Jesenná 5
040 01 Košice
e-mail: rujhaziova@yahoo.com