Emil Calda
„Eukleidovské“ řešení kvadratické rovnice

Učitel matematiky, Vol. 14 (2006), No. 1, 17–21

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150707`

„EUKLEIDOVSKÉ" ŘEŠENÍ KVADRATICKÉ ROVNICE

EMIL CALDA

V následujících řádcích vyřešíme v komplexním oboru kvadratickou rovnici netradičním způsobem – pouze pomocí pravítka a kružítka. Půjde o rovnici

$$x^2 + px + q = 0$$

s reálnými koeficienty p, q, kde $|p|$, $|q|$ jsou délky úseček sestrojitelné eukleidovsky.

Předpokládejme nejprve, že diskriminant této rovnice je číslo nezáporné, tj. že platí

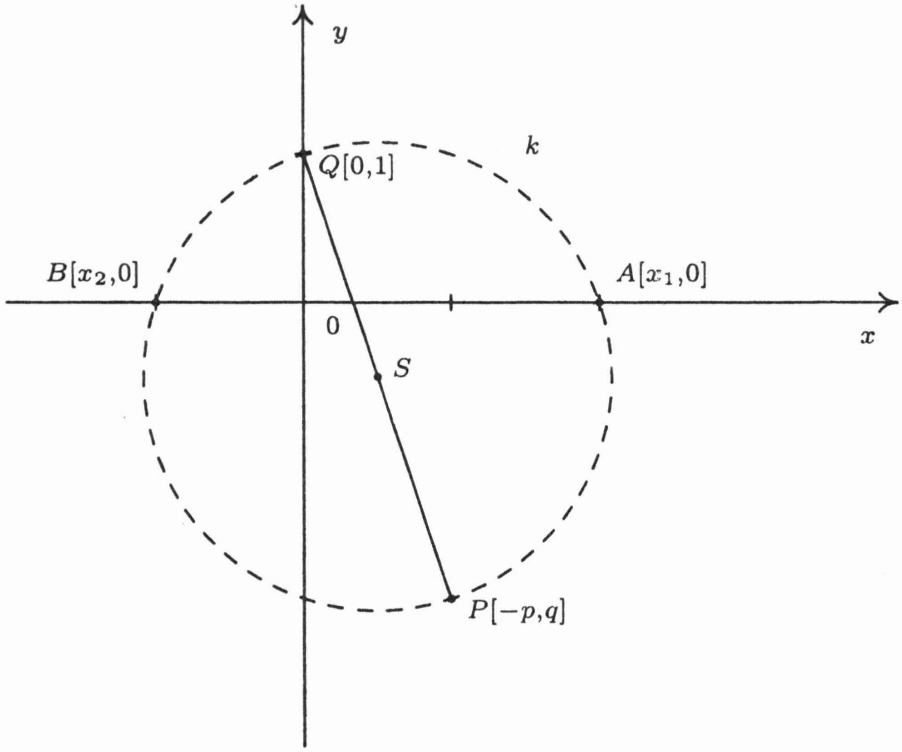
$$p^2 - 4q \geq 0$$

a určeme její reálné kořeny. V kartézské souřadnicové soustavě (viz obr. 1) sestrojíme body $P[-p, q]$, $Q[0, 1]$ a kružnici k s průměrem $|PQ|$, která má střed v bodě $S\left[-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right]$ a poloměr

$$r = |SQ| = |SP| = \frac{\sqrt{p^2 + (q-1)^2}}{2}.$$

Snadno ukážeme, že tato kružnice má s osou x aspoň jeden společný bod, neboť její poloměr je větší nebo roven vzdálenosti d jejího středu od osy x. Z předpokladu $p^2 \geq 4q$ totiž ekvivalentními úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}
p^2 + (q-1)^2 &\geq 4q + (q-1)^2 \\
p^2 + (q-1)^2 &\geq (q+1)^2 \\
\frac{\sqrt{p^2 + (q-1)^2}}{2} &\geq \frac{|q+1|}{2} \\
r &\geq d.
\end{aligned}$$



Obr. 1 ($p = -1$, $q = -2$)

Dokážeme nyní, že souřadnice x_1, x_2 průsečíků $A\,[x_1, 0]$, $B\,[x_2, 0]$ kružnice k s osou x jsou rovny kořenům dané kvadratické rovnice. Kružnice k má rovnici

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + (q-1)^2}{4},$$

odkud po dosazení $y = 0$ a jednoduchých úpravách máme

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4}.$$

Vzhledem k předpokladu $p^2 \geq 4q$ dostáváme

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

což jsou kořeny dané rovnice.

Pro ilustraci vyřešíme tímto způsobem rovnici $x^2 - x - 2 = 0$. Protože splňuje výše uvedené podmínky, sestrojíme v kartézské souřadnicové soustavě body $P[1, -2]$, $Q[0, 1]$; kružnice s průměrem PQ protne osu x v bodech, jejichž x-ové souřadnice jsou čísla -1 a 2, která jsou kořeny dané rovnice.

Zabývejme se nyní případem, kdy diskriminant rovnice $x^2 + {} + px + q = 0$ je číslo záporné, takže je

$$p^2 - 4q < 0.$$

(Všimněme si, že z tohoto předpokladu plyne, že číslo q je kladné.) Stejně jako v předchozím případě sestrojíme (viz obr. 2) ve zvolené kartézské souřadnicové soustavě body $P[-p, q]$, $Q[0, 1]$ a bod $S\left[-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right]$, který je středem úsečky $|PQ|$.

Dále sestrojíme body $A\left[-\frac{p}{2}, 0\right]$ a $B\left[0, \frac{q+1}{2}\right]$ jako paty kolmic vedených bodem S k souřadnicovým osám.

Určíme nyní průsečíky Q_1, Q_2 přímky $y = 1$ a kružnice k_1 se středem v bodě B a poloměrem $r_1 = |OB|$. Kružnice k_1 má rovnici

$$x^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{q+1}{2}\right)^2,$$

odkud po dosazení $y = 1$ a úpravě dostaneme

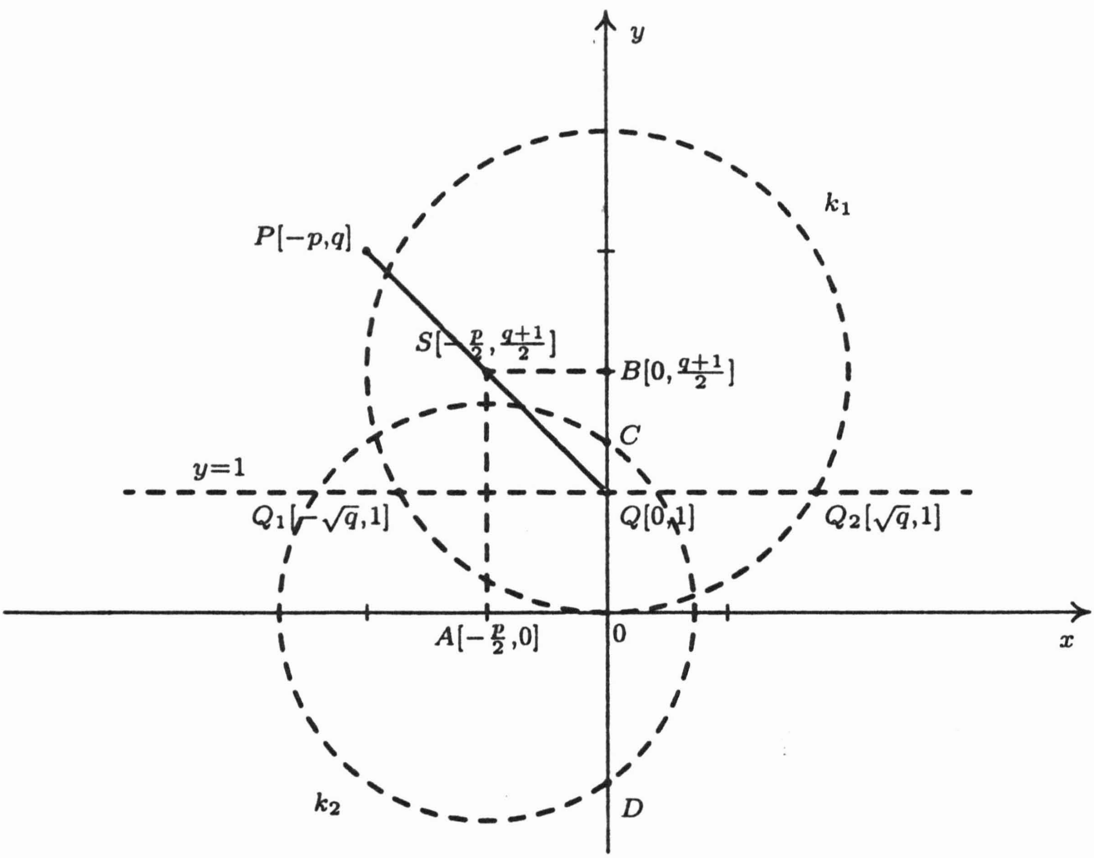
$$x^2 = q.$$

Vzhledem k tomu, že q je číslo kladné, jsou tím body Q_1, Q_2 určeny: $Q_1\left[\sqrt{q}, 1\right]$, $Q_2\left[-\sqrt{q}, 1\right]$; pro jejich vzdálenosti od bodu Q platí:

$$|QQ_1| = |QQ_2| = \sqrt{q}.$$

Určíme dále průsečíky C, D osy y a kružnice k_2 se středem v bodě A a poloměrem $r_2 = |QQ_1|$. Kružnice k_2 má rovnici

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\sqrt{q}\right)^2,$$



Obr. 2 ($p = 2$, $q = 3$)

odkud po dosazení $x = 0$ a úpravě dostaneme

$$y^2 = \frac{4q - p^2}{4}.$$

Vzhledem k předpokladu $p^2 - 4q < 0$, jsou tím body C, D určeny:

$$C\left[0, \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}\right], \; D\left[0, -\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}\right].$$

Připomeneme-li si nyní, že kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$ se záporným diskriminantem jsou čísla

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \mathrm{i}\sqrt{4q - p^2}}{2},$$

vidíme, že reálná část těchto kořenů je rovna x-ové souřadnici x_A bodu A a jejich imaginární části se rovnají y-ovým souřadnicím y_C, y_D bodů C, D:

$$x_A = -\frac{p}{2}$$

$$y_C = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}, y_D = -\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2},$$

Zjistili jsme tak, že kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$ jsou čísla

$$x_1 = x_A + \mathrm{i}y_C$$

$$x_2 = x_A + \mathrm{i}y_D = x_A - \mathrm{i}y_C.$$

Pro ilustraci vyřešíme tímto způsobem rovnici $x^2+4x+5=0$, jejíž diskriminant je záporný. Sestrojíme body $P[-4,5]$, $Q[0,1]$ a ze středu úsečky PQ spustíme kolmice na souřadnicové osy. Na ose x dostaneme bod A, jehož x-ová souřadnice x_A je rovna reálné části kořenů této rovnice; na ose y dostaneme bod B. Sestrojíme kružnici k_1 se středem v tomto bodě, která má poloměr $|OB|$, a její průsečík Q_1 s přímkou procházející bodem B rovnoběžně s osou x. Kružnice k_2 se středem v bodě A a s poloměrem QQ_1 protne osu y v bodech C, D, jejichž y-ové souřadnice y_C, y_D určují imaginární části kořenů dané rovnice. Takto získaná čísla

$$x_1 = x_A + \mathrm{i}y_C = -2 + \mathrm{i}$$

$$x_2 = x_A - \mathrm{i}y_C = -2 - \mathrm{i}$$

jsou vskutku kořeny rovnice $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Autor si plně uvědomuje, že tímto způsobem nikdo kvadratickou rovnici řešit nebude. Bere tento článek jako nostalgickou vzpomínku na doby, kdy ještě pravítko a kružítko sám používal.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: calda@karlin.mff.cuni.cz