Renáta Ujháziová
Strapec problémov a otočenie (1)

Učitel matematiky, Vol. 14 (2006), No. 1, 9–16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150706

STRAPEC PROBLÉMOV A OTOČENIE (1)

RENÁTA UJHÁZIOVÁ

Konštrukčné úlohy sú sami o sebe pre väčšinu žiakov neľahkou časťou matematiky, o konštrukčných úlohách s využitím zobrazení už ani nehovoriac. Žiaci veľakrát nemajú problém s vymenovaním a slovným reprodukovaním základných vlastností preberaných zobrazení. Aplikovanie ich vlastností priamo v konkrétnej konštrukčnej úlohe im však už mnohokrát robí problémy. Môže to byť spôsobené

- jednak „povrchnými" vedomosťami žiakov, tzn. osvojením si vedomostí bez hlbšieho porozumenia,
- jednak nevhodnou voľbou stratégie riešenia úloh, ktorá sa žiakom prezentuje,
- jednak izolovanosťou predkladaných úloh.

Príčinám osvojenia si vedomostí bez hlbšieho porozumenia sa v tomto článku nebudeme venovať, ukážeme si však, ako je možné odstrániť izolovanosť predkladaných úloh a okrajovo sa budeme venovať aj prezentovaniu (podľa nás) vhodnej stratégie riešenia úloh.

Obtiažnosť riešenia mnohých úloh, resp. problémov je v školskej praxi úzko spojené s ich izolovanosťou. Nezriedka sa stáva, že žiaci pochopia riešenie zadanej úlohy prezentovanej na hodine, ale majú problém vyriešiť úlohu (v rámci domácej úlohy alebo na písomke), ktorá je len obmenou vzorovej úlohy. Dôvod? Žiaci sami veľa krát nevedia zovšeobecniť metódu riešenia pre ľubovoľné zadané útvary a my – učitelia ich k tomu často krát na hodinách nevedieme. Snáď najzreteľnejšie sa to prejavuje pri úlohách s využitím zobrazení, v ktorých treba zostrojiť útvar za splnenia daných podmienok s využitím zobrazenia. Tento „nedostatok" je možné odstrániť použitím *metódy vytvárania strapca problémov* (*metóda vytváření hroznu problémů*), niekedy tiež nazývanou ako *metóda generovaných problémov* (viď [1]). Základom pre vytváranie strapca problémov je tzv. základný problém, ktorý riešime spoločne pomocou heuristických stratégií. Po jeho vyriešení a po pochopení jeho metódy riešenia začíname vytvárať (generovať) podobné problémy alebo problémy v príbuzných oblastiach.

Táto metóda sa dá úspešne využívať aj pri riešení konštrukčných úloh s využitím zobrazení. Jej použitie budeme prezentovať zväčša na nepolohových konštrukčných úlohách s využitím otočenia. Pomocou uvedeného strapca problémov sa pokúsime ilustrovať, ako je možné využiť príklady a úlohy z učebníc na vytváranie neizolovaných problémov. Zároveň pri niektorých úlohách budeme prezentovať aj stratégiu riešenia, o ktorej si myslíme, že je pre žiakoch z hľadiska porozumenia jednoduchšia, v porovnaní s bežne používanou stratégiou riešenia cesta späť. (Pozn. pri tejto stratégii riešenia zadanej úlohy vychádzame z koncovej situácie a vraciame sa späť k východzej situácii.)

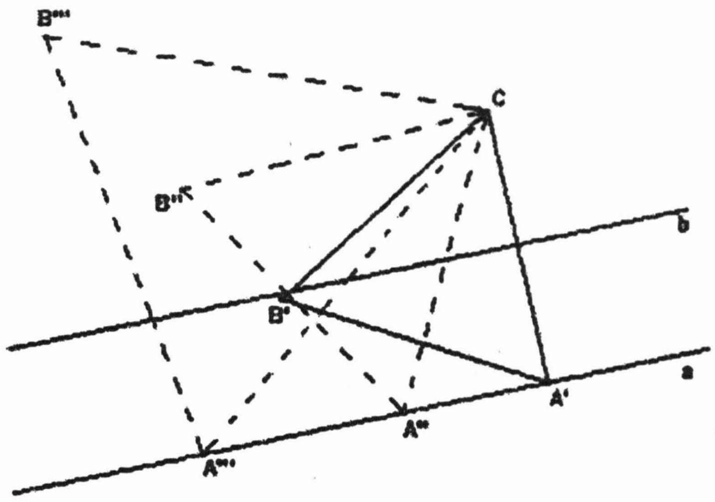
Základný problém:
Dané sú dve rovnobežné priamky a, b a mimo nich bod C. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby jeho vrchol A ležal na priamke a a vrchol B ležal na priamke b. (viď [3] príklad 4 na str. 149)

Riešenie:
Dané: a, b, $a||b$, C, $C \notin a$, $C \notin b$
Hľadané: rovnostranný $\triangle ABC$
Podmienka: $A \in a$, $B \in b$
Z vlastnosti rovnostranného trojuholníka ABC vyplýva:

$$|AB| = |BC| = |AC| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle CBA| = 60^\circ.$$

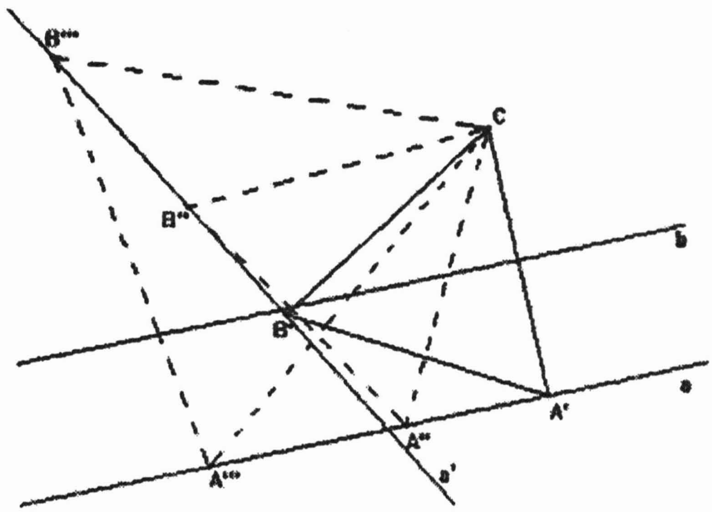
Úlohu budeme riešiť pomocou ***stratégie vypustenia podmienok*** (viď [2] na strane 38). Vypustíme napr. podmienku, že B leží na priamke b, pričom všetky ostatné podmienky zachováme.

Pokúsime sa zistiť, na akej množine bodov budú ležať body B', B'', B''', ... v prípade, že všetky ostatné podmienky úlohy budú zachované (viď obr. 1a).



Obr. 1a

Na základe experimentu môžeme vysloviť hypotézu, že všetky body B', B'', B''', ... v prípade zachovania všetkých ostatných podmienok problému, budú ležať na priamke (viď obr. 1b).



Obr. 1b

Učiteľ: Odôvodnite, prečo budú body B', B'', B''', ... ležať práve na priamke. Aký vzťah je medzi bodmi A' a B', A'' a B'', A''' a B''', ... ? V akom zobrazení sa zobrazí bod A' do bodu B', resp. bod A'' do bodu B'', atď. ... ?

Žiak: Keďže body B', B'', B''', ... sú obrazmi bodov A', A'', A''', ... v otočení okolo bodu C o $-60°$ a body A', A'', A''', ... ležia na priamke a, tak aj obrazy týchto bodov B', B'', B''', ... ležia na priamke. Táto priamka je obrazom priamky a v otočení okolo bodu C o $-60°$. Označme ju napr. a'.

Učiteľ: Okrem toho, že hľadaný bod B má ležať na priamke a', kde má ešte ležať?

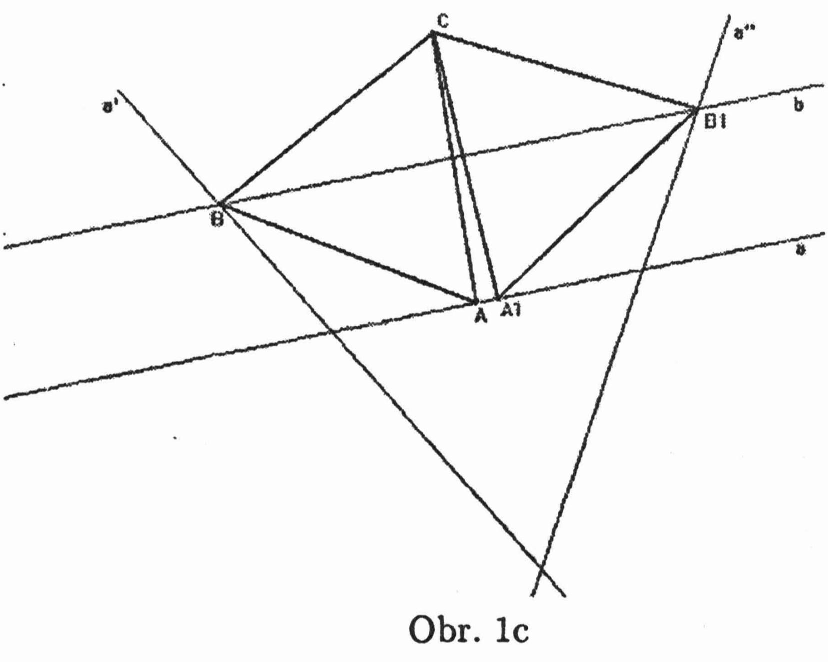
Žiak: Zo zadania úlohy vieme, že hľadaný bod B má ležať aj na priamke b. Teda bod B nájdeme ako priesečník priamok a' a b.

Poznámka: Uvedeným dialógom sme sa snažili ilustrovať priebeh rozboru úlohy, ktorý sme aplikovali aj pri riešení podobných úloh. Dialóg nie je presným prepisom toho, čo sa udialo na hodine, ale zachytáva kľúčové momenty rozboru úlohy.

Samotnú konštrukciu môžeme teda zapísať nasledovne:

1. a, b, $a||b$, C, $C \notin a$, $C \notin b$
2. a'; $R(C, -60°)$: $a \to a'$
3. B, $B \in b \cap a'$
4. A, $R(C, 60°)$: $B \to A$
5. $\triangle ABC$

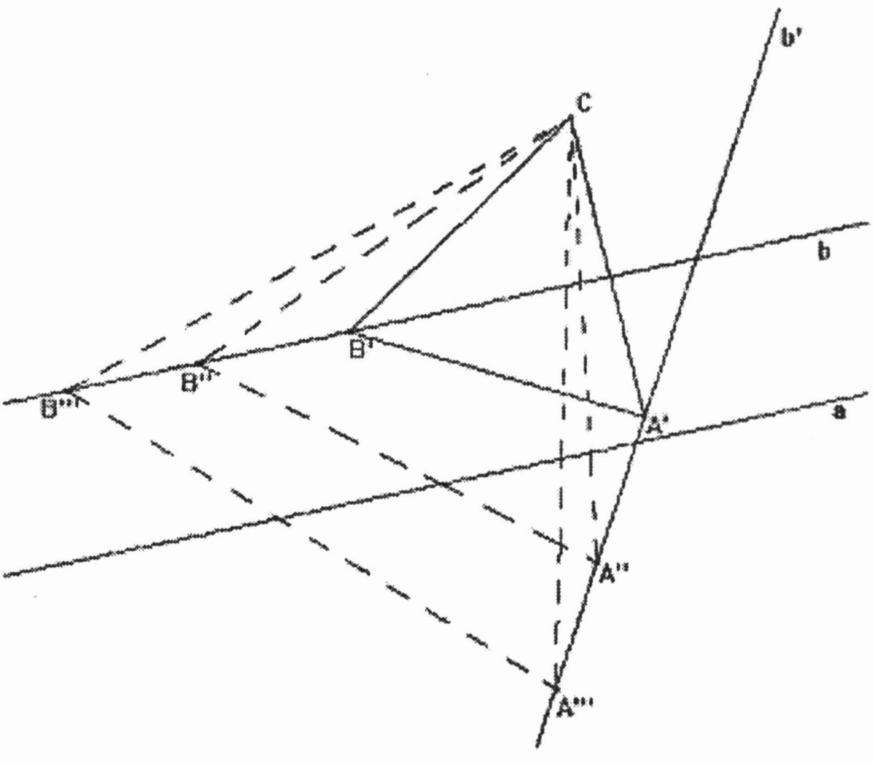
Pretože priamku a môžeme otočiť aj proti smeru hodinových ručičiek, tj. o $60°$, riešením úlohy je aj trojuholník A_1B_1C. Z riešenia je zrejmé, že počet riešení závisí od vzájomnej polohy priamok a' a b a a'' a b. Keďže pre $a||b$ je $a'||b$, $a''||b$, tak úloha má vždy dve riešenia (viď obr. 1c)



Obr. 1c

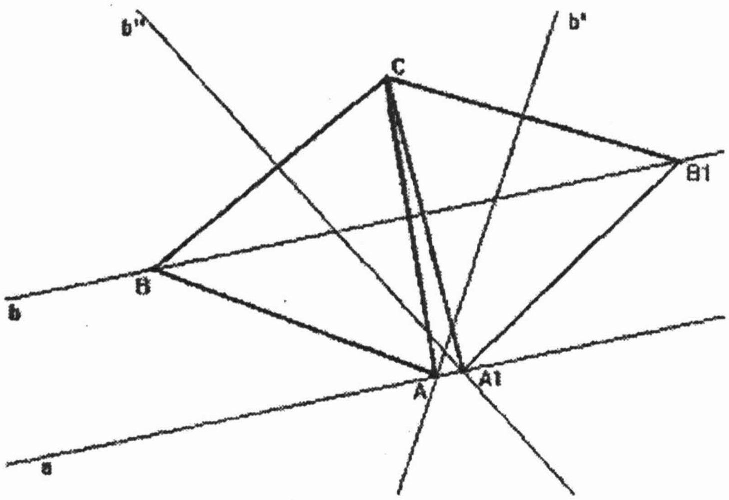
Učiteľ: Namiesto podmienky $B \in b$ vypustime teraz podmienku $A \in a$ a zostrojme hľadaný rovnostranný trojuholník ABC.

Spoločne so žiakmi vyriešime základný problém aj vypustením podmienky $A \in a$. V tomto prípade budeme postupovať analogicky ako v prípade vypustenia podmienky $B \in b$. Budeme hľadať množinu bodov, na ktorej ležia body A', A'', A''', ... Experimentovaním dospejeme k hypotéze, že všetky tieto body ležia na priamke (viď obr. 1d). Táto priamka je obrazom priamky b v otočení okolo bodu C o uhol $60°$ (označme ju b'). Hľadaný bod A preto nájdeme ako priesečník priamok a a b'. Bod B bude potom obrazom bodu A v otočení okolo bodu C o uhol $-60°$.



Obr. 1d

Poznámka: Žiaci by mali na základe takto prezentovaného riešenia dospieť k záveru, že je jedno, či otočíme priamku a okolo bodu C o uhol $-60°$ alebo priamku b okolo bodu C o uhol $60°$. Vďaka obidvom postupom nájdeme to isté riešenie (viď obr. 1e).



Obr. 1e

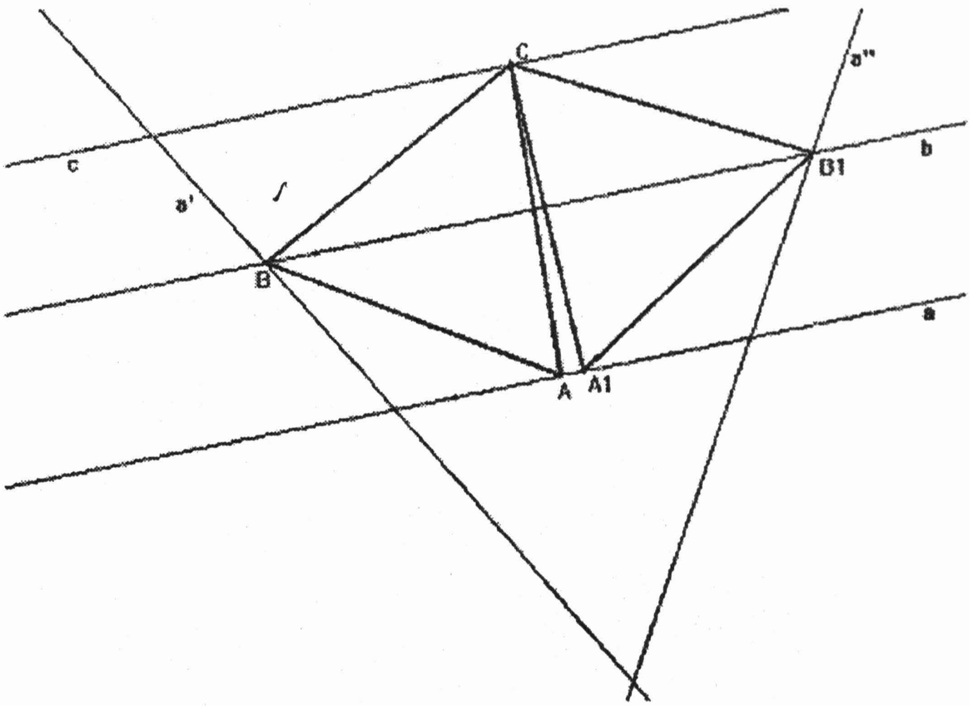
V takto zadanom základnom probléme je možné meniť nielen jeho ***zadané*** či ***hľadané prvky***, ale aj jeho ***podmienky*** rôznorodo. Úplne najjednoduchší problém, ktorý z neho vieme sformulovať, získame modifikáciou jeho ***zadaných prvkov*** napr. pridaním priamky c, na ktorej bude bod C ležať. Priamka c môže byť rovnobežná aj rôznobežná s priamkami a, b. V prípade, že priamka c je rovnobežná so zadanými priamkami, problém 1 by sme mohli sformulovať nasledovne.

Problém 1: Dané sú tri rôzne rovnobežné priamky a, b, c a bod $C \in c$. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby jeho vrchol A ležal na priamke a a vrchol B ležal na priamke b. (viď [3] úloha 3.52 na strane 151)

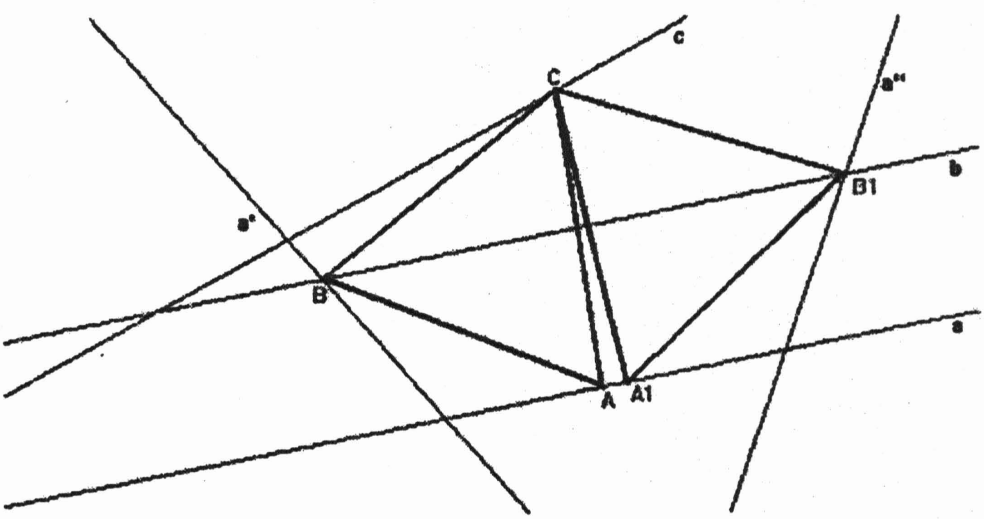
V prípade, že priamka c je rôznobežná s priamkami a, b, je možné sformulovať problém analogicky.

Problém 1': Dané sú dve rovnobežné priamky a, b, priamka c, ktorá je s nimi rôznobežná a bod $C \in c$. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby jeho vrchol A ležal na priamke a a vrchol B ležal na priamke b.

Pokiaľ žiaci správne pochopili metódu riešenia základného problému a to, od čoho závisí jeho počet riešení, tak by mali bez problémov dospieť k záveru (aj bez samotnej konštrukcie), že riešenie problému 1, aj problému 1' je také isté ako riešenie základného problému. Dokonca by mali objaviť aj skutočnosť, že to, na akom útvare leží bod C, ak je konkrétne daný, nemá vôbec vplyv na úlohu, resp. problém a na jeho riešenie (viď obr. 2a a obr. 2b). (Pozn. Ak však na takéto zovšeobecnenie nie sú ešte žiaci schopní, treba im zadať ďalšie problémy, v ktorých priamku c nahradíme nejakým iným útvarom.)



Obr. 2a



Obr. 2b

Keď teraz v základnom probléme zmeníme ***hľadaný prvok***, tzn. namiesto rovnostranného trojuholníka ABC by sme mali zostrojiť napr. rovnoramenný trojuholník ABC s nejakými vlastnosťami, pričom však zachováme zadané prvky aj podmienky problému, nasledujúci problém môžeme sformulovať takto:

Problém 2: Dané sú dve rovnobežné priamky a, b a mimo nich bod $C \in c$. Zostrojte všetky rovnoramenné trojuholníky ABC so základňou AB a uhlom veľkosti $55°$ vrchole A tak, aby $A \in a$ a $B \in b$.

Literatura

[1] Kopka, J., Hrozny problémů ve školské matematice, *Acta Universitatis Purkynianae,* Ústí nad Labem, 1999.

[2] Kopka, J., Výzkumný přístup při výuce matematiky, *Acta Universitatis Purkynianae,* Ústí nad Labem, 2004.

[3] Pomykalová, E., *Matematika pro gymnázia – Planimetrie,* Prometheus, Praha, 2001.

RNDr. Renáta Ujháziova
Ústav matematických vied PF UPJŠ,
Jesenná 5
040 01 Košice
e-mail: rujhaziova@yahoo.com

Dokončení v příštím čísle