# Matematická olympiáda

*Učitel matematiky*, Vol. 15 (2007), No. 4, 213–231

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150702

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 18. – 21. 3. 2007 se ve Zlíně uskutečnilo celostátní kolo 56. ročníku matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C pro školní rok 2007–2008.

## Úlohy celostátního kola 56. ročníku matematické olympiády

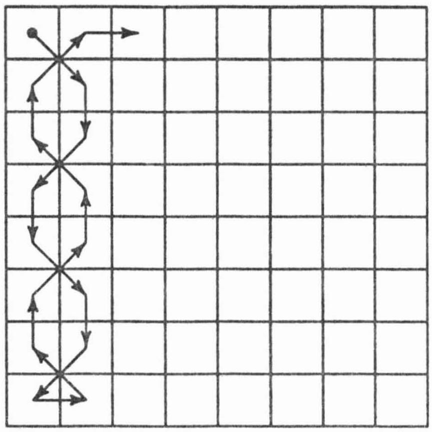
Zlín 18. – 21. března 2007

**1.** Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$ $(n \geq 2)$ postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě „šikmo" a „přímo". „Šikmo" znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. „Přímo" znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna $n$, pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající „šikmo" tak, že figurka projde celou šachovnici a na každém poli se octne právě jednou.

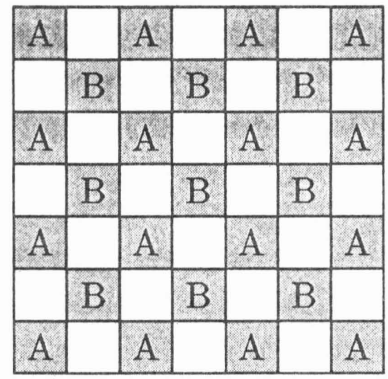
(*Peter Novotný*)

**Řešení.** Nejprve ukážeme, že úloha má řešení pro libovolné sudé $n$. Postavíme-li figurku např. na kterékoliv rohové pole šachovnice $n \times n$, projdeme celou šachovnici po sousedních blocích typu $2 \times n$ způsobem naznačeným na obr. 1 pro $n = 8$. Posloupnosti tahů zde odpovídá posloupnost na sebe navazujících orientovaných úseček. Zcela analogicky lze postupovat pro každé sudé $n$.

Nyní ukážeme, že pro žádné $n \geq 3$ liché nelze šachovnici projít požadovaným způsobem. Důkaz provedeme sporem. Připusťme, že pro určité liché $n$ na šachovnici $n \times n$ existuje posloupnost tahů vyhovující podmínkám úlohy. Všechna její pole obarvíme podobně jako běžnou šachovnici $8 \times 8$, a to tak, že rohová pole budou černá (podobně jako na obr. 2 pro $n = 7$). Dále všechna černá pole označíme písmeny A a B tak, aby žádná dvě černá pole mající



Obr. 1




Obr. 2

společný právě jeden bod (vrchol) nebyla označena týmž písmenem. Budou-li rohová (černá) pole označena např. písmenem A, bude zřejmě počet polí A o $n$ větší než počet polí B.

Pole šachovnice, která figurka požadovaným způsobem projde, označme postupně $1, 2, 3, \ldots, n^2$ a $k$-tý tah zápisem $k \mapsto \mapsto k+1$. Je-li pole s číslem 1 černé, jsou černá právě pole s čísly $1, 2, 5, 6, 9, 10, \ldots$; přitom každý (šikmý) tah $1 \mapsto 2$, $5 \mapsto 6$, $9 \mapsto \mapsto 10$, … spojuje černá pole označená různými písmeny, takže se celkové počty polí A a B liší nejvýše o 1, což odporuje zjištěnému rozdílu. Ke stejnému sporu dojdeme i v případě, kdy je pole s číslem 1 bílé, takže černá jsou právě pole s čísly $3, 4, 7, 8, 11, 12, \ldots$ spojená (šikmými) tahy $3 \mapsto 4$, $7 \mapsto 8$, $11 \mapsto 12$, …

Tím je úloha vyřešena, řešením jsou všechna sudá $n \geq 2$.

**2.** V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme $L$, $M$ středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům $BCA$, $BCD$. Dále označme $R$ průsečík kolmic vedených z bodů $L$ a $M$ po řadě na přímky $AC$ a $BD$. Dokažte, že trojúhelník $LMR$ je rovnoramenný.

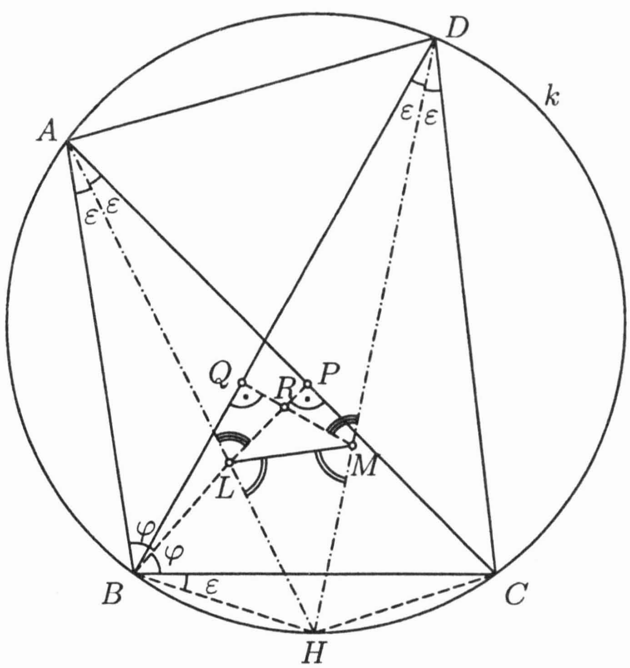
(*P. Leischner*)

**Řešení.** Průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech $A$, $D$ v trojúhelnících $BCA$, $BCD$ označme $H$ (obr. 3). Jak známo, je bod $H$ středem příslušného oblouku $BC$ kružnice $k$ opsané čtyřúhelníku

$ABCD$ (oblouku, který neobsahuje vrcholy $A$ a $D$). Označme $\varepsilon = |\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle CAH| = |\sphericalangle BDH| = |\sphericalangle CDH| = |\sphericalangle CBH|$ a $\varphi = |\sphericalangle ABL| = |\sphericalangle CBL|$. Pak platí

$$|\sphericalangle BLH| = |\sphericalangle BAL| + |\sphericalangle ABL| = \varepsilon + \varphi = |\sphericalangle LBH|.$$

Trojúhelník $HLB$ je tudíž rovnoramenný se základnou $LB$, takže




Obr. 3

$|HB| = |HL|$. Analogicky je i $|HC| = |HM|$. A protože $|HB| = |HC|$, je rovněž $|HL| = |HM|$, takže trojúhelník- $HML$ je rovnoramenný a platí $|\sphericalangle HLM| = |\sphericalangle HML|$.

Označme ještě $P$ kolmý průmět bodu $L$ na přímku $AC$ a $Q$ kolmý průmět bodu $M$ na přímku $BD$ (uvažovaný bod $R$ je tak průsečíkem přímek $LP$ a $MQ$). Protože pravoúhlé trojúhelníky $APL$ a $DQM$ se shodují v úhlech při vrcholech $A$ a $D$, jsou shodné i úhly $PLA$ a $QMD$ při vrcholech $L$ a $M$. Odtud a z rovnosti $|\sphericalangle HLM| = |\sphericalangle HML|$ tak vyplývá rovnost $|\sphericalangle PLM| = |\sphericalangle QML|$. To znamená, že trojúhelník $LMR$ je rovnoramenný, jak jsme měli dokázat.

**3.** Označme $\mathbb{N}$ množinu všech přirozených čísel a uvažujme všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$f\bigl(xf(y)\bigr) = yf(x).$$

Určete nejmenší možnou hodnotu $f(2\,007)$.

(*P. Calábek*)

**Řešení.** Uvažujme libovolnou funkci $f$ požadovaných vlastností. Nejprve ukážeme, že je prostá. Jestliže $f(y_1) = f(y_2)$, pak pro všechna přirozená čísla $x$ platí

$$y_1 f(x) = f\bigl(xf(y_1)\bigr) = f\bigl(xf(y_2)\bigr) = y_2 f(x),$$

a poněvadž $f(x)$ je přirozené číslo, plyne odtud $y_1 = y_2$, což znamená, že funkce $f$ je prostá.

Volbou $x = 1$ v dané rovnici dostaneme $f\bigl(f(y)\bigr) = yf(1)$, což pro $y = 1$ dává $f\bigl(f(1)\bigr) = f(1)$. Protože $f$ je prostá, plyne odtud

$$f(1) = 1, \tag{1}$$

takže pro všechna přirozená čísla $y$ navíc platí

$$f\bigl(f(y)\bigr) = y. \tag{2}$$

Z právě odvozeného vztahu zároveň plyne, že oborem hodnot funkce $f$ je celá množina $\mathbb{N}$. Můžeme tedy pro libovolné přirozené číslo $z$ najít $y$, pro něž $y = f(z)$ a zároveň $f(y) = z$, takže podle vztahu ze zadání pak platí

$$f(xz) = f\bigl(x(f(y)\bigr) = yf(x) = f(z)f(x).$$

Odtud lze matematickou indukcí snadno odvodit, že pro všechna přirozená čísla $n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n). \tag{3}$$

Ukážeme, že obraz $f(p)$ libovolného prvočísla $p$ je také prvočíslo. Předpokládejme, že $f(p) = ab$, kde $a$, $b$ jsou přirozená čísla různá od jedné. Podle (2) a (3) platí

$$p = f\big(f(p)\big) = f(ab) = f(a)f(b).$$

Protože funkce $f$ je prostá a $f(1) = 1$, platí $f(a) > 1$, $f(b) > 1$, což odporuje předpokladu, že $p$ je prvočíslo.

Jelikož $2\,007 = 3^2 \cdot 223$ je rozklad čísla $2\,007$ na prvočinitele, dostaneme podle (3)

$$f(2\,007) = f^2(3)f(223),$$

kde obě čísla $f(3)$ a $f(223)$ jsou prvočísla. Jestliže $f(3) = 2$, potom podle (2) platí $f(2) = 3$ a nejmenší možná hodnota $f(223)$ je 5, takže $f(2\,007) \geq 20$. Pokud $f(3) = 3$, nejmenší možná hodnota $f(223)$ je 2 a platí $f(2\,007) \geq 18$. Snadno vidíme, že pro každou jinou volbu hodnot $f(3)$ a $f(223)$ platí $f(2\,007) \geq 18$.

Ukážeme, že existuje funkce vyhovující zadání, pro kterou platí $f(2\,007) = 18$. Definujme funkci $f$ následujícím způsobem: Pro libovolné přirozené číslo $x$, které zapíšeme jako $x = 2^k 223^m q$, kde $k$ a $m$ jsou celá nezáporná čísla a $q$ je přirozené číslo nesoudělné s čísly 2 a 223, zadáme hodnotu $f(x)$ vztahem

$$f(2^k 223^m q) = 2^m 223^k q.$$

Pak platí $f(2\,007) = f(223 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3^2 = 18$. Ověříme, že tato funkce $f$ má požadovanou vlastnost. Nechť $x = 2^{k_1} 223^{m_1} q_1$ a $y = 2^{k_2} 223^{m_2} q_2$ jsou libovolná přirozená čísla zapsaná výše uvedeným způsobem. Potom

$$\begin{aligned} f\big(xf(y)\big) &= f\big(2^{k_1} 223^{m_1} q_1 f(2^{k_2} 223^{m_2} q_2)\big) = \\ &= f(2^{k_1+m_2} 223^{m_1+k_2} q_1 q_2) = 2^{k_2+m_1} 223^{m_2+k_1} q_1 q_2 \end{aligned}$$

a současně

$$yf(x) = 2^{k_2} 223^{m_2} q_2 f(2^{k_1} 223^{m_1} q_1) = 2^{k_2+m_1} 223^{m_2+k_1} q_1 q_2.$$

Nejmenší možná hodnota čísla $f(2\,007)$ je 18.

*Poznámka.* Z výše uvedeného řešení vyplývá, že každá funkce $f$, která vyhovuje dané funkcionální rovnici, je určena nějakou bijekcí $\phi$ množiny prvočísel na sebe, která pro každé prvočíslo $p$ splňuje rovnost $\varphi(\varphi(p)) = p$, a to předpisem

$$f(1) = 1,$$
$$f(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}) = \varphi(p_1)^{k_1} \varphi(p_2)^{k_2} \dots \varphi(p_m)^{k_m},$$

kde $p_i$ jsou navzájem různá prvočísla a $k_i$ nezáporná celá čísla. Každá bijekce $\varphi$ uvedené vlastnosti rozkládá množinu prvočísel na sjednocení jednoprvkových a dvouprvkových navzájem disjunktních množin takových, že pro každou z nich tvaru $\{p\}$ platí $\varphi(p) = p$ a pro každou z nich tvaru $\{p_1, p_2\}$ platí $\varphi(p_1) = p_2$, $\varphi(p_2) = p_1$. Naopak každý takový rozklad určuje vyhovující bijekci $\varphi$.

**4.** Množina $\mathsf{M}$ obsahuje všechna přirozená čísla od 1 do 2 007 včetně a má následující vlastnost: Je-li číslo $n$ prvkem množiny $\mathsf{M}$, leží v $\mathsf{M}$ všechny členy aritmetické posloupnosti s prvním členem $n$ a diferencí $n + 1$. Rozhodněte, zda množina $\mathsf{M}$ musí obsahovat všechna přirozená čísla větší než určité číslo $m$.

(*J. Šimša*)

**Řešení.** Ukážeme, že uvedený závěr obecně neplatí. Jako protipříklad zvolíme množinu

$$\mathsf{M} = \mathbb{N} \setminus \{a \; a + 1 \text{ je prvočíslo větší než } 2\,008\},$$

která zřejmě obsahuje všechna čísla od 1 do 2 007. Přitom aritmetická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem $a_1 = n \in \mathsf{M}$ a diferencí $d = n + 1$ má obecný člen tvaru

$$a_k = a_1 + (k - 1)d = n + (k - 1)(n + 1) = (n + 1)k - 1,$$

odkud plyne, že číslo $a_k + 1 = (n + 1)k$ není prvočíslo pro žádný index $k > 1$, takže $a_k$ leží v $\mathsf{M}$ pro každý index $k$ (ať už $a_k \le 2\,007$, nebo $a_k \ge 2\,008$). Protože prvočísel je nekonečně mnoho, je nekonečně mnoho i přirozených čísel, která ve zvolené množině $\mathsf{M}$ neleží.

**Jiné řešení.** Každá vyhovující množina $\mathsf{M}$ musí obsahovat všechny členy prvních 2 007 aritmetických posloupností s prvním členem $n \leq 2\,007$ a diferencí $n+1$:

$$A_1 = (1, 3, 5, \dots),\ A_2 = (2, 5, 8, \dots),\ \dots,$$
$$A_{2\,007} = (2\,007, 4\,015, 6\,023, \dots).$$

Zřejmě množina hodnot $\mathsf{A}_k = \{k, 2k+1, 3k+2, \dots\}$ posloupnosti $A_k$ je pro každé $k$ tvořena všemi přirozenými čísly tvaru $i(k+1)+k$ s celým nezáporným $i$.

Vysvětlíme, proč

$$\mathsf{M} = \mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \dots \cup \mathsf{A}_{2\,007}$$

je nejmenší množina požadované vlastnosti. Ukážeme totiž, že pokud $n \in \mathsf{A}_k$ pro některá čísla $n$ a $k$, pak $\mathsf{A}_n \subseteq \mathsf{A}_k$. Nechť tedy $n \in \mathsf{A}_k$ a $m \in \mathsf{A}_n$. Pak platí $n = i(k+1)+k$ a $m = j(n+1)+n$ pro vhodná celá nezáporná $i$ a $j$, odkud $m = j(i+1)(k+1) + i(k+1)+k = (ji+j+i)(k+1)+k$, což znamená, že $m \in \mathsf{A}_k$.

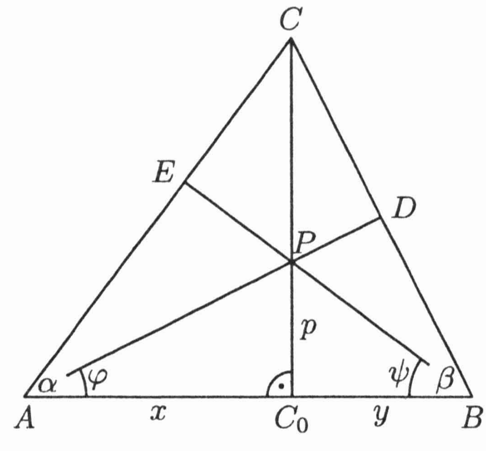
Existuje však nekonečně mnoho přirozených čísel, která v sestrojené „minimální" vyhovující množině $\mathsf{M}$ neleží; jsou to například všechny násobky čísla $2\,008!$.

**5.** Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$ takový, že $|AC| \neq |BC|$. Uvnitř jeho stran $BC$ a $AC$ uvažujme body $D$ a $E$, pro něž je $ABDE$ tětivový čtyřúhelník. Průsečík jeho úhlopříček $AD$ a $BE$ označme $P$. Jsou-li přímky $CP$ a $AB$ navzájem kolmé, pak $P$ je průsečíkem výšek trojúhelníku $ABC$. Dokažte.

*(J. Mazák)*

**Řešení.** Označme $\varphi = |\sphericalangle BAD|$ a $\psi = |\sphericalangle ABE|$ (obr. 4). Z rovnosti obvodových úhlů $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB|$ v tětivovém čtyřúhelníku $ABDE$ tak při obvyklém značení úhlů v trojúhelník-u $ABC$ plyne

$$\alpha + \psi = \beta + \varphi. \tag{1}$$




Obr. 4

Označme $C_0$ patu výšky z vrcholu $C$, $v_c$ velikost výšky $CC_0$ a $x$, $y$, $p$ velikosti příslušných úseků $AC_0$, $BC_0$, $PC_0$ (obr. 4), takže

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{x}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{p}{y},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_c}{x}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{v_c}{y}. \tag{2}$$

Pokud bod $P$ není průsečík výšek (tj. úhel $\alpha + \psi$ není pravý), můžeme podle (1) psát

$$\operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \operatorname{tg}(\beta + \varphi),$$

což podle známého vzorce pro tangens součtu po dosazení z (2) dává (využíváme rovnost $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\varphi$, která z (2) navíc plyne)

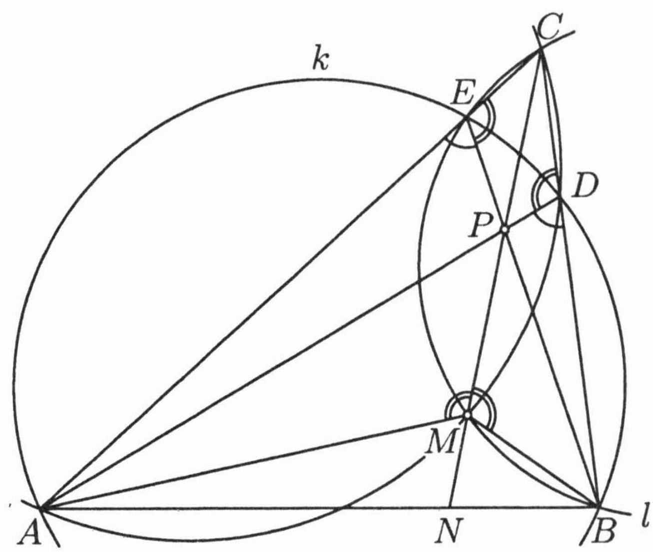
$$\frac{v_c}{x} + \frac{p}{y} = \frac{v_c}{y} + \frac{p}{x}$$

neboli

$$(p - v_c)(x - y) = 0.$$

Protože vzhledem k daným předpokladům je $p < v_c$ a $x \neq y$, nemůže poslední rovnost platit. Je tedy $\alpha + \psi = 90°$ a bod $P$ je průsečíkem výšek, což jsme chtěli dokázat.

**Jiné řešení.** Označme $k$ kružnici opsanou tětivovému čtyřúhelníku $ABDE$ a uvažme ještě kružnice $l$ a $m$ opsané trojúhelníkům $BEC$ a $ADC$ (obr 5). Protože tětiva $BE$ kružnice $l$ protíná tětivu $AD$ kružnice $m$ v bodě $P$, mají kružnice $l$, $m$ kromě bodu $C$ ještě další průsečík, který označíme $M$. Z uvedené konstrukce vyplývá, že bod $P$ leží uvnitř každé ze tří uvažovaných kružnic a má k nim stejnou mocnost (je to jejich *potenční* bod), proto bod $P$ leží uvnitř úsečky $CM$. Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou




Obr. 5

$BC$ kružnice $l$ plyne $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BEC| = 180° - |\sphericalangle AEB|$ a analogicky $|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle ADB|$, což vzhledem k rovnosti obvodových úhlů $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB|$ nad tětivou $AB$ kružnice $k$ znamená, že

$$|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle AMC|.$$

Označme $N$ patu výšky z vrcholu $C$ trojúhelník-u $ABC$. Pokud $M \neq N$, znamená poslední rovnost, že pravoúhlé trojúhelník-y $BNM$ a $ANM$ jsou shodné, což ovšem odporuje předpokladu $|AC| \neq |BC|$. Je proto $M = N$, $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle AMC| =$

$= 90°$ a bod $P$ je tak průsečíkem výšek trojúhelník-u $ABC$, což jsme chtěli dokázat.

**6.** Určete všechny uspořádané trojice $(x, y, z)$ navzájem různých reálných čísel, které vyhovují množinové rovnici

$$\{x, y, z\} = \left\{\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y}\right\}.$$

(*J. Šimša*)

Jsou-li $x$, $y$, $z$ tři navzájem různá reálná čísla, pak hodnoty

$$u = \frac{x-y}{y-z}, \quad v = \frac{y-z}{z-x}, \quad w = \frac{z-x}{x-y} \tag{1}$$

jsou zřejmě čísla různá od 0 a $-1$ a jejich součin je roven 1. Stejnou vlastnost tedy musí mít i hodnoty $x$, $y$, $z$ z každé hledané trojice. Budeme proto neustále předpokládat, že platí vztahy

$$x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \quad x \neq y \neq z \neq x, \quad xyz = 1. \tag{2}$$

Protože daná množinová rovnice je pro uspořádané trojice $(x, y, z)$, $(z, x, y)$ a $(y, z, x)$ stejná, budeme kromě (2) předpokládat, že platí $x > \max\{y, z\}$, a rozlišíme dva případy podle toho, zda $y > z$, nebo $z > y$. Zaveďme ještě označení intervalů $I_1 = (0, \infty)$, $I_2 = (-1, 0)$, $I_3 = (-\infty, -1)$.

*Případ* $x > y > z$. Pro zlomky (1) zřejmě platí $u \in I_1$, $v \in I_2$ a $w \in I_3$, takže $u > v > w$. Daná množinová rovnice proto může být splněna jedině tak, že $u = x$, $v = y$ a $w = z$. Po dosazení zlomků (1) a snadné úpravě dojdeme k rovnicím

$$xy + y = yz + z = zx + x, \quad \text{kde } x \in I_1,\ y \in I_2,\ z \in I_3. \tag{3}$$

Podle podmínky $xyz = 1$ z (2) můžeme do rovnice $xy + y = zx + x$ za člen $zx$ dosadit $1/y$ a rovnici dále upravit:

$$xy + y = \frac{1}{y} + x \Rightarrow x(y-1) = \frac{1-y^2}{y} \Rightarrow x = -\frac{1+y}{y} \Rightarrow y = -\frac{1}{1+x}.$$

(Využili jsme toho, že s ohledem na $y \in I_2$ platí $y \neq 1$.) Z posledního vzorce plyne, že hodnota prvního výrazu v soustavě (3) je rovna $-1$, takže z rovnosti druhého výrazu $-1$ máme

$$z = -\frac{1}{1+y} = -\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+x}} = -\frac{1+x}{x},$$

pak ovšem i třetí výraz v (3) je roven $-1$. Proto každé řešení naší úlohy (ve zkoumaném případě, kdy $x > y > z$) je tvaru

$$(x, y, z) = \left(t, -\frac{1}{1+t}, -\frac{1+t}{t}\right), \tag{4}$$

kde $t \in I_1$ je libovolné (protože platí (3), zkouška není nutná). Z uvedeného postupu rovněž plyne, že volbou $t \in I_2$ (resp. $t \in I_3$) ve vzorci (4) dostaneme všechna řešení naší úlohy s vlastností $z > x > y$ (resp. $y > z > x$), takže při výpisu všech řešení v závěrečné odpovědi není nutné uvádět cyklické permutace trojic ze vzorce (4).

*Případ* $x > z > y$. Pro zlomky (1) tentokrát platí $u \in I_3$, $v \in I_1$ a $w \in I_2$, takže $v > w > u$, a daná množinová rovnice je tudíž splněna, právě když $u = y$, $v = x$ a $w = z$. Po dosazení zlomků z (1) dojdeme k soustavě

$$x - y = y(y - z), \quad y - z = x(z - x), \quad z - x = z(x - y). \tag{5}$$

Sečtením těchto tří rovnic dostaneme

$$0 = y(y - z) + x(z - x) + z(x - y) = (y - x)(x + y - 2z),$$

odkud vzhledem k $x \neq y$ plyne $z = \frac{1}{2}(x + y)$. Po dosazení zpět do (5) snadno zjistíme (opět s ohledem na $x \neq y$), že vyhovuje pouze $x = 1$, $y = -2$ a $z = -\frac{1}{2}$. Stejnou trojicí čísel je tvořeno (jediné) řešení úlohy s vlastností $y > x > z$ i (jediné) řešení, pro něž $z > y > x$.

*Odpověď*: Řešením úlohy jsou všechny uspořádané trojice (4), kde $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, a tři trojice $(x, y, z)$ tvaru

$$\left(1, -2, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 1, -2\right), \left(-2, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

*Poznámka.* Vypíšeme-li všech šest možných soustav odpovídajících dané množinové rovnici, dostaneme kromě soustav (3) a (5) ještě soustavy

$$\begin{aligned}
x - y &= z(y - z), & y - z &= y(z - x), & z - x &= x(x - y);\\
x - y &= x(y - z), & y - z &= z(z - x), & z - x &= y(x - y);\\
x - y &= y(y - z), & y - z &= z(z - x), & z - x &= x(x - y);\\
x - y &= z(y - z), & y - z &= x(z - x), & z - x &= y(x - y).
\end{aligned}$$

První dvě vzniknou ze soustavy (5) cyklickou záměnou proměnných, takže je lze řešit týmž postupem jako (5). Sečtením všech tří rovnic v každé ze dvou zbývajících soustav dostaneme tutéž rovnici

$$x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx \quad \text{neboli} \quad (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 0,$$

která má jediné řešení $x = y = z$, což nejsou navzájem různá čísla.

**Jiné řešení.** Jsou-li $x$, $y$, $z$ tři navzájem různá reálná čísla, pak hodnoty

$$u = \frac{x-y}{y-z}, \quad v = \frac{y-z}{z-x}, \quad w = \frac{z-x}{x-y} \tag{1}$$

jsou zřejmě různé od čísel 0 a $-1$ a platí mezi nimi vztahy

$$v = f(u), \quad w = f(v) \quad \text{a} \quad u = f(w), \tag{2}$$

kde $f$ je lineární lomená funkce daná předpisem $f(t) = -\dfrac{1}{1+t}$. Přesvědčíme se o tom přímým výpočtem:

$$f(u) = -\frac{1}{1+u} = -\frac{1}{1+\dfrac{x-y}{y-z}} = -\frac{y-z}{(x-y)+(y-z)} = \frac{y-z}{z-x} = v;$$

z důvodu cykličnosti platí i zbývající dva vztahy v (2).

Uvedený poznatek znamená, že každé řešení úlohy je pro vhodné $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ buďto uspořádaná trojice tvaru

$$(x, y, z) = \bigl(t, f(t), f\bigl(f(t)\bigr)\bigr) = \Bigl(t, -\frac{1}{1+t}, -\frac{1+t}{t}\Bigr), \tag{3}$$

nebo uspořádaná trojice tvaru

$$(x, y, z) = \big(t, f\big(f(t)\big), f(t)\big) = \Big(t, -\frac{1+t}{t}, -\frac{1}{1+t}\Big). \qquad (4)$$

Zbývá provést zkoušku: snadno se přesvědčíme, že zatímco trojice tvaru (3) je řešením pro každé $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, trojice tvaru (4) vyhovují pouze pro $t = 1$, $t = -2$ a $t = -\frac{1}{2}$ a jsou to cyklické permutace těchto tří hodnot.

## Výsledková listina celostátního kola 56. ročníku MO kategorie A

*Vítězové:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | Michal Rolínek | 8/8 | GJK Praha 6, Parléřova 2 | **34** |
| 2. | Miroslav Klimoš | 2/4 | GMK Bílovec | **28** |
| 3. | Jiří Řihák | 4/4 | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | **27** |
| 4.–5. | Zbyněk Konečný | 3/4 | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | **24** |
| | Hana Šormová | 2/4 | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | **24** |
| 6. | Samuel Říha | 2/4 | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | **22** |
| 7–8. | Anežka Faltýnková | 4/4 | GJŠ Přerov, Komenského | **21** |
| | Lenka Slavíková | 4/4 | G Mnichovo Hradiště | **21** |
| 9. | Pavel Motloch | 6/6 | GPB Frýdek-Místek | **19** |
| 10. | Tomáš Javůrek | 8/8 | G Jeseník, Komenského | **18** |

*Další úspěšní řešitelé:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11.–13. | Hana Bendová | 8/8 | G Česká Lípa | **16** |
| | Tomáš Jeziorský | 4/4 | GMK Bílovec | **16** |
| | Jan Máca | 7/8 | G Třebíč, Masarykovo nám. | **16** |
| 14. | Alena Peterová | 7/8 | G Dobruška, Pulická | **15** |
| 15. | Šárka Gregorová | 8/8 | G Praha 6, Nad Alejí | **14** |
| 16.–21. | Radim Hošek | 8/8 | G České Budějovice, Jírovcova | **13** |
| | Tomáš Kobrle | 4/4 | G Jilemnice | **13** |
| | Lukáš Malina | 4/4 | GChD Praha 5, Zborovská | **13** |
| | Matěj Peterka | 7/8 | G Praha 6, Nad Alejí | **13** |
| | Tomáš Toufar | 3/4 | GMK Bílovec | **13** |
| | Jan Vaňhara | 6/8 | GLJ Holešov, Palackého | **13** |
| 22.–23. | Pavel Kuchyňa | 6/6 | GBN Hradec Králové | **11** |
| | Marek Scholle | 8/8 | G Pardubice, Dašická | **11** |

## ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 2007–2008

### Kategorie A

**A-I-1.** Najděte všechny trojice reálných čísel $a, b, c$ s vlastností: Každá z rovnic

$$x^3 + (a+1)x^2 + (b+3)x + (c+2) = 0,$$
$$x^3 + (a+2)x^2 + (b+1)x + (c+3) = 0,$$
$$x^3 + (a+3)x^2 + (b+2)x + (c+1) = 0$$

má v oboru reálných čísel tři různé kořeny, celkem je to však pouze pět různých čísel.

(*Jaromír Šimša*)

**A-I-2.** V rovině je dána úsečka $AV$ a ostrý úhel velikosti $\alpha$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem těm trojúhelníkům $ABC$ s vnitřním úhlem $\alpha$ při vrcholu $A$, jejichž výšky se protínají v bodě $V$.

(*Pavel Leischner*)

**A-I-3.** Množinu $\mathsf{M}$ tvoří $2n$ navzájem různých kladných reálných čísel, kde $n \geq 2$. Uvažujme $n$ obdélníků, jejichž rozměry jsou čísla z $\mathsf{M}$, přičemž každý prvek z $\mathsf{M}$ je použit právě jednou. Určete, jaké rozměry mají tyto obdélníky, je-li součet jejich obsahů
a) největší možný; b) nejmenší možný.

(*Jaroslav Švrček*)

**A-I-4.** Určete počet konečných rostoucích posloupností přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ všech možných délek $k$, pro které platí $a_1 = 1$, $a_i \mid a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $a_k = 969\,969$.

(*Martin Panák*)

**A-I-5.** Je dána kružnice $k$, bod $O$, který na ní neleží, a přímka $p$, která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici $l$, která má vnější dotyk s kružnicí $k$ a dotýká se i přímky $p$. Příslušné body dotyku označme $A$ a $B$. Pokud body $O$, $A$, $B$ neleží v přímce, sestrojíme kružnici $m$ opsanou trojúhelník-u $OAB$. Dokažte, že všechny takové kružnice $m$ mají další společný bod různý od bodu $O$, anebo se dotýkají téže přímky.

(*Ján Mazák*)

**A-I-6.** Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n$ existuje celé číslo $a$ $(1 < a < 5^n)$ takové, že platí $5^n \mid a^3 - a + 1$.

(*Ján Mazák*)

## Kategorie B

**B-I-1.** Najděte všechna přirozená čísla $k$, pro něž je zápis čísla $6^k \cdot 7^{2007-k}$ v desítkové soustavě zakončen dvojčíslím a) 02; b) 04.

(*Eva Řídká*)

**B-I-2.** V pásu mezi rovnoběžkami $p$, $q$ jsou dány dva různé body $M$ a $N$. Sestrojte kosočtverec nebo čtverec, jehož dvě protější strany leží na přímkách $p$ a $q$ a body $M$ a $N$ po jednom leží na zbývajících dvou stranách.

(*Jaromír Šimša*)

**B-I-3.** Jsou-li $x$ a $y$ reálná čísla, pro něž platí $x^3 + y^3 \leq 2$, potom $x + y \leq 2$. Dokažte.

(*Ján Mazák*)

**B-I-4.** Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s délkami stran $a$, $b$, $c$ a délkami těžnic $t_a$, $t_b$, $t_c$, pro něž platí $a+t_a = b+t_b$. Uvažujte oba případy, kdy $AB$ je a) přepona, b) odvěsna.

(*Pavel Novotný*)

**B-I-5.** Určete všechny dvojice $a$, $b$ reálných čísel, pro něž má každá z kvadratických rovnic

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \qquad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž právě jeden z nich je oběma rovnicím společný.

(*Jaroslav Švrček*)

**B-I-6.** Obdélník $2\,005 \times 2\,007$ je rozdělen na černé a bílé jednotkové čtverečky. Dokažte, že pak pro jednu z barev (černou nebo bílou) existuje více než 95 800 pravoúhelníků (složených z jednotkových čtverečků), jež se navzájem nepřekrývají a jejichž rohové čtverečky mají vesměs zvolenou barvu, přičemž každá z jejich stran je tvořena aspoň dvěma čtverečky.

(*Pavel Leischner*)

## Kategorie C

**C-I-1.** Určete nejmenší přirozené číslo $n$, pro něž i čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ jsou přirozená.

(*Jaroslav Švrček*)

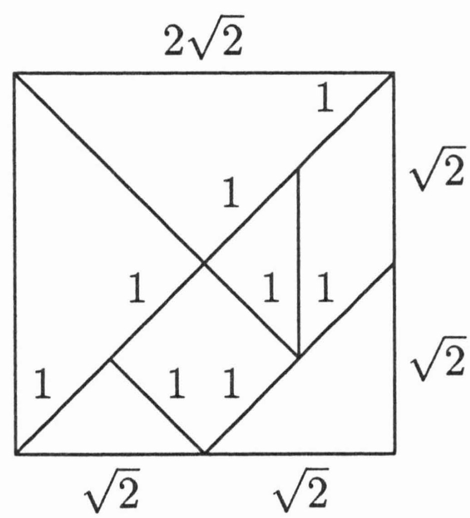
**C-I-2.** Čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsána kružnice se středem $S$. Určete rozdíl $|\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD|$, jestliže $|\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle BSC| = 40°$.

(*Jaromír Šimša*)

**C-I-3.** Máme určitý počet krabiček a určitý počet kuliček. Dáme-li do každé krabičky právě jednu kuličku, zbyde nám $n$ kuliček. Když však dáme právě $n$ krabiček stranou, můžeme všechny kuličky rozmístit tak, aby jich v každé zbývající krabičce bylo právě $n$. Kolik máme krabiček a kolik kuliček?

(*Vojtech Bálint*)

**C-I-4.** Tangram je skládačka, kterou lze vyrobit z papíru rozřezáním vystřiženého čtverce na sedm dílů podle čar vyznačených na obrázku. Předpokládejme, že délka strany čtverce je $2\sqrt{2}$ cm. Rozhodněte, zda lze z dílů tangramu složit:
a) obdélník $2\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}$,
b) obdélník $\sqrt{2}\,\text{cm} \times 4\sqrt{2}\,\text{cm}$.




(*Pavel Leischner*)

**C-I-5.** Ve skupině $n$ lidí ($n \geq 4$) se někteří znají. Vztah „znát se“ je vzájemný: jestliže osoba $A$ zná osobu $B$, pak také $B$ zná $A$ a nazýváme je dvojicí známých.

a) Jestliže mezi každými čtyřmi osobami jsou aspoň čtyři dvojice známých, pak každé dvě osoby, které se neznají, mají společného známého. Dokažte.

b) Zjistěte, pro která $n \geq 4$ existuje skupina osob, v níž jsou mezi každými čtyřmi osobami aspoň tři dvojice známých a současně se některé dvě osoby neznají ani nemají společného známého.

c) Rozhodněte, zda ve skupině šesti osob mohou být v každé čtveřici právě tři dvojice známých a právě tři dvojice neznámých.

(*Ján Mazák*)

**C-I-6.** Klárka měla na papíru napsáno trojmístné číslo. Když ho správně vynásobila devíti, dostala čtyřmístné číslo, jež začínalo touž číslicí jako číslo původní, prostřední dvě číslice se rovnaly a poslední číslice byla součtem číslic původního čísla. Které čtyřmístné číslo mohla Klárka dostat?

(*Peter Novotný*)