Učitel matematiky

Emil Calda

O bodech ”podobných” severnímu pólu a také o rovnoběžkách

Učitel matematiky, Vol. 15 (2007), No. 3, 129–132

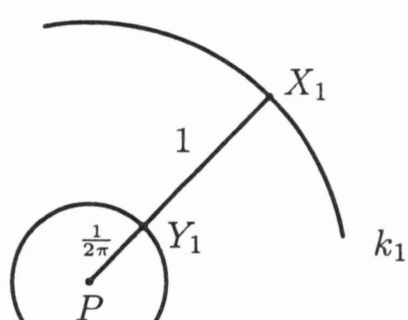
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150694

O BODECH „PODOBNÝCH“ SEVERNÍMU PÓLU

a také o rovnoběžkách

EMIL CALDA

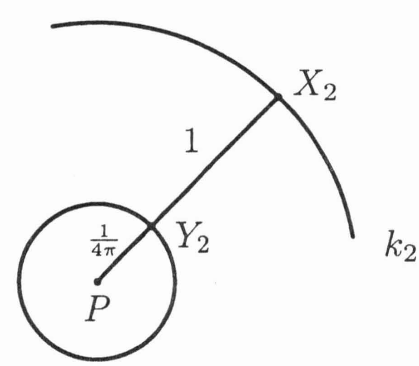
I když asi nikdo ze čtenářů tohoto slovutného periodika na severním pólu nikdy nebyl, přesto každý ví, že kdyby na něm byl a vyšel z něho směrem na jih a po jednom kilometru chůze se dal na východ a pak po dalším kilometru na sever, dostal by se zase po jednom kilometru do výchozího bodu, tj. na severní pól. Položme si však otázky: *Je severní pól jediným bodem na zeměkouli, který má tuto vlastnost? A když ne, které další body ji mají?* Kladnou odpovědí převážné většiny studentů, kterým položíme první z těchto otázek, se nenecháme zmást a ukážeme, že těchto bodů je na zemském povrchu nekonečně mnoho.



Obr. 1

Přejdeme za tím účelem na polokouli jižní a sestrojíme podle obr. 1 kružnici se středem P v jižním pólu, která má délku jeden kilometr; protože zemský povrch v okolí bodu P můžeme považovat za rovinu, bude tato kružnice mít poloměr $\frac{1}{2\pi}$ kilometrů. Snadno usoudíme, že daným podmínkám vyhovuje každý bod

X_1, jehož vzdálenost od bodu P činí $1 + \frac{1}{2\pi}$ kilometrů. Vskutku: vyjdeme-li z bodu X_1 na obr. 1 a jdeme-li směrem na jih, dorazíme po jednom kilometru chůze do bodu Y_1; odtud půjdeme stále na východ a když urazíme vzdálenost jednoho kilometru, dostaneme se opět do bodu Y_1 – šli jsme totiž po kružnici, která má délku $2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}$ kilometrů. Z bodu Y_1 se vydáme na sever a po jednom kilometru chůze zjistíme, že jsme v bodě X_1, z něhož jsme vyšli. Tím jsme ukázali, že severní pól není jediným bodem, do kterého se třemi kilometrovými cestami na jih, na východ a na sever dostaneme, když z něho vyjdeme; těchto bodů je nekonečně mnoho a patří k nim – kromě severního pólu – všechny body kružnice k_1 se středem v jižním pólu a s poloměrem $1 + \frac{1}{2\pi}$ kilometrů.



Obr. 2

Kromě severního pólu a bodů kružnice k_1 však existuje dalších nekonečně mnoho bodů, které mají uvedenou vlastnost. Vezměme např. bod X_2 na obr. 2, který má od jižního pólu P vzdálenost $1 + \frac{1}{4\pi}$ kilometrů. Vyjdeme-li z něho směrem na jih, dojdeme po jednom kilometru do bodu Y_2, z něhož se dáme na východ; ujdeme-li tímto směrem půl kilometru, dostaneme se opět do bodu Y_2, neboť jsme opsali kružnici délky $2\pi \cdot \frac{1}{4\pi}$ kilometrů. Projdeme-li se po této kružnici východním směrem ještě jednou, ujdeme vzdálenost půl kilometru a budeme znovu v bodě Y_2; odtud se dáme na sever a po jednom kilometru chůze staneme v bodě X_2, z něhož jsme vyšli. Je zřejmé, že spolu s bodem X_2 mají tuto vlastnost i všechny body kružnice k_2 se středem v bodě P a s poloměrem

$1 + \frac{1}{4\pi}$ kilometrů.

I když k severnímu pólu a všem bodům kružnice k_1 připojíme všechny body kružnice k_2, stále ještě nebudeme mít všechny body zemského povrchu, do kterých se navrátíme tak, že z nich vyjdeme a cestujeme popsaným způsobem. Podobně jako u kružnice k_2 můžeme totiž postupovat i pro body kružnice k_3 se středem v bodě P a s poloměrem $1 + \frac{1}{6\pi}$. Vyjdeme z jejího libovolného bodu jižním směrem, po jednom kilometru se dáme na východ a třikrát obejdeme kružnici se středem v bodě P a s poloměrem $\frac{1}{6\pi}$ kilometrů; po dokončení třetího „oběhu“ (tj. když jsme urazili vzdálenost jeden kilometr) se dáme na sever a po jednom kilometru se opět ocitneme v bodě, z něhož jsme vyšli. Znamená to, že také všechny body kružnice k_3 se středem v bodě P a s poloměrem $1 + \frac{1}{6\pi}$ kilometrů mají požadovanou vlastnost.

Nyní už je zcela jasné, jaké jsou odpovědi na otázky z úvodu tohoto článku:

Severní pól není jediným bodem na zeměkouli, do kterého se navrátíme, když z něho vyjdeme směrem na jih, po jednom kilometru chůze se dáme na východ, po dalším kilometru na sever a po jednokilometrové chůzi se zastavíme. Tuto vlastnost mají také všechny body všech kružnic se středem v jižním pólu, jejichž poloměry jsou $1 + \frac{1}{2n\pi}$ kilometrů, kde n probíhá všechna přirozená čísla.

V souvislosti s tímto „geografickým problémem“ se ještě zmíníme o „geografickém omylu“, který nedávno zazněl v pořadu *Chcete být milionářem.* Na otázku *Kolik je na zeměkouli rovnoběžek?* dostal milionářský adept na výběr čtyři možnosti, přičemž správná – jak se ukázalo – měla být, že jich je sto osmdesát. Což ovšem správné není!

Odhlédněme od toho, že jich je ve skutečnosti nekonečně mnoho, a předpokládejme, že autor otázky měl na mysli pouze rovnoběžky udávající zeměpisnou šířku v celých stupních. Těchto celostupňových zeměpisných šířek je devadesát na severní a devadesát na jižní polokouli, takže na celé zeměkouli jich je 181, neboť k nim musíme připočítat i rovník, který má zeměpisnou šířku 0°. Počet rovnoběžek pak závisí na tom, zda oba póly, tj. body se zeměpisnými šířkami 90°, za rovnoběžky považujeme nebo nikoli. V případě, že je za rovnoběžky nepovažujeme, je celkový počet rovnoběžek 179; jestliže oba póly za rovnoběžky považujeme, je na zeměkouli celkem 181 rovnoběžek. Odpověď, že na zeměkouli je celkem 180 rovnoběžek, je tedy zcela určitě nesprávná. I v televizi se holt mohou mýlit!

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: calda@karlin.mff.cuni.cz