A. Jančařík

Početní algoritmy II - násobení

Učitel matematiky, Vol. 15 (2007), No. 2, 72–78

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150678

POČETNÍ ALGORITMY II – NÁSOBENÍ

ANTONÍN JANČAŘÍK[2]

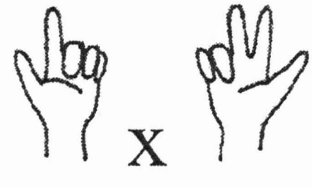
První z článků o početních algoritmech se věnoval pozičním soustavám a ukazoval, jak se v různých číselných soustavách sčítá, odčítá a dělí. V tomto článku se vrátíme do desítkové soustavy a budeme se věnovat pouze jediné operaci – násobení. Násobení všichni dobře známe již od základní školy, kde jsme se učili algoritmus písemného násobení, díky němuž můžeme bez větších problémů vynásobit dvě libovolně velká čísla. Existují však i jiné, méně známé postupy. V tomto článku postupně představím několik dalších metod a triků, které můžeme při násobení používat.

Násobení na prstech I

Nejprve si vysvětlíme, jak na prstech násobit čísla od šesti do deseti. Na prstech jedné a druhé ruky ukážeme, o kolik je první a druhé číslo větší než pět (čili např. číslo 7 reprezentují dva zvednuté prsty). Spočteme počet zvednutých prstů, vynásobíme jej deseti a k výsledku přičteme součin nezvednutých prstů na levé a nezvednutých prstů na pravé ruce. Výsledné číslo je součin zobrazených čísel.

Ukázka

Na ukázku spočítáme, kolik je sedm krát osm. Na jedné ruce zvednete dva prsty a na druhé ruce tři prsty. Součet zvednutých prstů je pět a součin prstů nezvednutých je šest (tři krát dva). Zjistili jste, že $7 \cdot 8 = 5 \cdot 10 + 2 \cdot 3 = 56$.



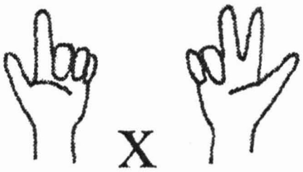
[2]Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/P561.

Násobení na prstech II

Nyní přejdeme k větším číslům, číslům v rozsahu od deseti do patnácti. Na prstech jedné a druhé ruky ukážeme, o kolik je první a druhé číslo větší než deset. Spočteme počet zvednutých prstů, vynásobíme jej deseti a k výsledku přičteme součin zvednutých prstů, výsledek zvětšíme o sto a dostáváme součin požadovaných čísel.

Ukázka

Tentokrát budeme počítat, kolik je dvanáct krát třináct. Na jedné ruce zvednete dva prsty a na druhé ruce tři prsty. Počítáme však jinak. Součet zvednutých prstů je pět a součin zvednutých prstů je šest. Zjistili jste, že $12 \cdot 13 = 10 \cdot 5 + 6 + 100$.



Násobení na prstech III

Budeme pokračovat, nyní budeme násobit čísla v rozsahu od patnácti do dvaceti. Na prstech jedné a druhé ruky ukážeme, o kolik je první a druhé číslo větší než patnáct. Spočteme počet zvednutých prstů, vynásobíme jej dvaceti, k výsledku přičteme součin prstů, které zůstaly nezvednuté a výsledek zvětšíme o dvě stě. Výsledné číslo je součin zobrazených čísel.

Ukázka

V této ukázce spočítáme, kolik je šestnáct krát osmnáct. Na rukou ukazujeme, stejně jako v předchozím případě, dva a tři zvednuté prsty. Součet zvednutých prstů je čtyři a součin prstů nechaných dole je osm. Tedy platí, že $16 \cdot 18 = 4 \cdot 20 + 4 \cdot 2 + 200 = 288$.

Násobení na prstech IV

Takto můžeme pokračovat k větším a větším číslům, postup si ale ukážeme jen pro další pětici. Na prstech jedné a druhé ruky ukážeme, o kolik je první a druhé číslo větší než dvacet. Spočteme počet zvednutých prstů, vynásobíme jej dvaceti, k výsledku přičteme součin zvednutých prstů, výsledek zvětšíme o čtyři sta a dostáváme součin požadovaných čísel.

Vsuvka I

Největší z těchto výpočtů $(25 \cdot 25)$ jsme ani nemuseli počítat tak složitě. Pokud počítáme druhou mocninu čísla končícího pěti, můžeme poslední pětku oddělit, zbylé číslo vynásobit číslem o jedna větší a za výsledek připsat dvacet pět. Například: $125^2 = (12 \cdot 13)\,\&\,(5 \cdot 5) = 15\,625$.

Násobení na prstech popáté a naposledy

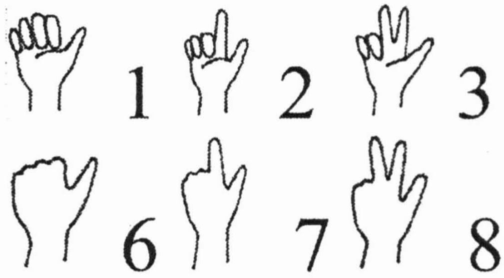
Zatím jsme si pouze ukazovali, jak násobit čísla z vybrané, po sobě jdoucí, pětice. Co když ale chci násobit čísla z rozdílných pětic, například dvanáct krát osmnáct? Nejprve musíme vyřešit, jak taková čísla vůbec pomocí prstů reprezentovat. Zde si musíme pomoci pomocí prstů na noze, na jedné straně těla ukážeme, o kolik je první číslo větší než deset (noha a tři prsty na ruce) a na druhé polovině těla, o kolik je druhé číslo větší než deset (dva prsty na ruce). Nyní můžeme algoritmu II – spočteme počet zvednutých prstů, vynásobíme jej deseti a k výsledku přičteme součin zvednutých prstů, výsledek zvětšíme o sto a dostáváme součin požadovaných čísel.

Tedy: $12 \cdot 18 = 10 \cdot (2 + 8) + 2 \cdot 8 + 100 = 216$. Nebo i upravený algoritmus III – spočteme počet zvednutých prstů, vynásobíme jej dvaceti, k výsledku přičteme součin prstů, které zůstaly nezvednuté, tedy: $12 \cdot 18 = 20 \cdot (2 + 8) + 2 \cdot 8 = 216$. (Zde taky vidíme, proč v algoritmu III vždy přičítáme dvě stě – u čísel větších než patnáct musíme vždy přičíst obě nohy.)

Takto můžeme jednoduše algoritmy upravovat a kombinovat a používat pro stále další čísla. Důležité však je, že opravdu fungují pro všechna zadání v uvedeném rozsahu. Vyzkoušejte si to a zkuste zjistit, proč tomu tak je.

Vsuvka II

Místo nohou můžeme také použít otáčení rukou, potom počítáme následujícím způsobem. Domluvíme se, že pokud je ruka obrácena dlaní k vám, ukazuje čísla od jedné do pěti, pokud je obrácena od vás, ukazuje čísla do 6 do 10.



Ukázka

Dvanáct krát sedmnáct reprezentujeme způsobem uvedeným na obrázku a počítáme: $12 \cdot 17 = 20 \cdot (2 + 7) + 8 \cdot 3 = 204$.

Proč funguje násobení na prstech

Důvod, proč funguje násobení na prstech, spočívá v následujících dvou rovnostech:

$$\left(\frac{N}{2} + x\right) \cdot \left(\frac{N}{2} + y\right) = \frac{N^2}{4} + \frac{N}{2} \cdot (x + y) + x \cdot y =$$

$$= \frac{N^2}{4} - \frac{N}{2} \cdot (x + y) + x \cdot y + N \cdot (x + y) =$$

$$= \left(\frac{N}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{N}{2} - y\right) + N \cdot (x + y)$$

$$(N + x) \cdot (N + y) = N^2 + N \cdot (x + y) + x \cdot y$$

Algoritmus ruského nevolníka

Na závěr si ukážeme dva algoritmy, pomocí nichž lze násobit dvě libovolně velká čísla bez znalosti algoritmu pro násobení. Vystačíme si pouze se sčítáním a násobením a dělením dvěma. První uváděný algoritmus je znám v anglické literatuře pod názvem *Algoritmus ruského nevolníka.*

Popis algoritmu

Čísla, která chcete mezi sebou vynásobit, napíšeme do dvou sloupců. Číslo v prvním sloupci budeme postupně dělit dvěma (celočíselně, beze zbytku) dokud nedostaneme číslo jedna. Číslo ve druhém sloupci budeme souběžně násobit dvěma. Výsledky píšeme vedle sebe, v každém kroku na samostatný řádek. Na závěr sečteme ta čísla ve druhém sloupci, u nichž je v prvním sloupci liché číslo.

Ukázka

Budeme počítat 41 krát 62.

	Dělené dvěma	Násobené dvěma
1	41	62
2	20	124
3	10	248
4	5	496
5	2	992
6	1	1 984

$$41 \cdot 62 = 62 + 496 + 1\,984 = 2\,542$$

Egyptský algoritmus násobení

Algoritmus ruského nevolníka je ve své podstatě shodný s algoritmem pro násobení starých Egypťanů. V egyptském algoritmu také jedno číslo opakovaně násobíte dvěma, pouze k němu připisujete, o kolika násobek se jedná.

Jedna násobek	1	62
Dvojnásobek	2	124
Čtyřnásobek	4	248
Osminásobek	8	496
Šestnáctinásobek	16	992
Dvaatřicetinásobek	32	1 984

Následně druhé číslo rozepíšeme pomocí příslušných násobků: $41 = 32 + 8 + 1$, nyní již výsledek dopočítáme stejně jako v předchozím příkladu.

Nevýhodou druhého algoritmu je to, že musíme umět přepsat číslo jako součet mocnin dvojky. Tato úloha je ekvivalentní přepsání čísla do dvojkové soustavy. Všimněte si, že v případě algoritmu ruského nevolníka dostáváme tento přepis v podstatě bez práce, stačí v prvním sloupci označit lichá čísla jedničkou a sudá čísla nulou a číslo přečíst odspoda nahoru.

	Dělené dvěma
1	41
0	20
0	10
1	5
0	2
1	1

41 je ve dvojkové soustavě 101001.

Modifikovaný algoritmus ruského nevolníka

Posledním algoritmem je algoritmus ruského nevolníka modifikovaný tak, aby nebylo nutné čísla ve druhém sloupci sčítat.

Popis algoritmu

Nejprve počítáme v prvním sloupci, pokud je na řádku liché číslo, napíšeme na další řádek číslo o jedna menší. Pokud je na řádku sudé číslo, napíšeme na další řádek jeho polovinu. Zastavíme u čísla jedna. Na poslední řádek napíšeme druhé číslo a postupujeme druhým sloupcem od zdola nahoru. Pokud je v levém sloupci sudé číslo, napíšeme do řádku vpravo dvojnásobek předchozího čísla. Pokud je v řádku vlevo liché číslo, přičteme k předchozímu výsledku číslo ze spodního řádku.

Krok 1	Odečítáme jedna	41	2 542	Přičítáme 62	Krok 14
Krok 2	Dělíme dvěma	40	2 480	Násobíme dvěma	Krok 13
Krok 3	Dělíme dvěma	20	1 240	Násobíme dvěma	Krok 12
Krok 4	Dělíme dvěma	10	620	Násobíme dvěma	Krok 11
Krok 5	Dělíme dvěma	5	310	Přičítáme 62	Krok 10
Krok 6	Odečítáme jedna	4	248	Násobíme dvěma	Krok 9
Krok 7	Dělíme dvěma	2	124	Násobíme dvěma	Krok 8
		1	62		

Závěr

Školská matematika se obvykle omezuje při výuce násobení na jediný algoritmus písemného násobení. Domnívám se, že je to velká škoda. Cílem tohoto článku bylo představit některé netradiční postupy, jimiž lze učivo a procvičování obohatit a zpestřit. V mnoha případech jsou uváděné postupy dokonce rychlejší a jednodušší nejen než klasický postup, ale v případě násobení na prstech i mnohem rychlejší než výpočet na kalkulačce. Rychlosti a efektivnosti různým algoritmů bude věnováno další pokračování. V rámci něj dojde i na srovnání posledních algoritmů z tohoto článku s „klasickým“ algoritmem.

RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky PdF UK
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: antonin.jancarik@pedf.cuni.cz