Jana Příhonská

Separované modely Pascalova trojúhelníka (2)

Učitel matematiky, Vol. 15 (2007), No. 2, 65–71

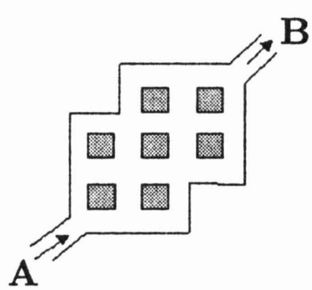
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150677

SEPAROVANÉ MODELY PASCALOVA TROJÚHELNÍKA (2)

JANA PŘÍHONSKÁ

Dokončení z minulého čísla

PROBLÉM 3 (převzat z [3])



V místě A vběhla do bludiště vyděšená myší rodina (viz obr. 3). Všechny myši šťastně proběhly bludištěm do místa B. Z rozhovoru udýchaných myší jsme se dozvěděli:

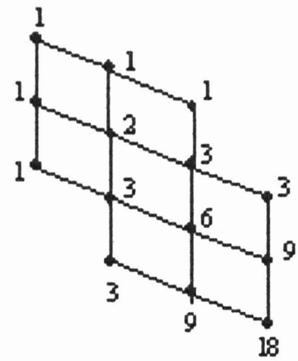
1. *Každá myš běžela po chodbičkách jen směrem doprava a nahoru.*
2. *Žádné dvě myši neběžely stejnou cestou.*
3. *Kdyby bylo ještě o jednu myš více, pak by některé musely běžet po stejné cestě.*

Kolik členů měla myší rodina?

Řešení: Zakreslíme zjednodušený plán bludiště. Vrcholy ve čtvercové síti představují křižovatky (uzly grafu), jejich strany chodby (hrany grafu) – viz obr. 3a. Ve vrcholech čtvercové sítě je vepsán počet cest, vedoucích od startu do daného vrcholu při pohybu ve směru šipek. Počet dostupných cest je dán uvedeným klíčem. Výraznější zpřehlednění celé situace vnáší do řešení užití tzv. h-diagramu, kde není nutno používat šipky (obr. 3b).

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 3 & \to & 9 & \to & 18 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
1 & \to & 3 & \to & 6 & \to & 9 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
1 & \to & 2 & \to & 3 & \to & 3 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & 1 & \to & 1 & &
\end{array}
$$

Obr. 3a: Síť bludiště a klíč



Obr. 3b: h-diagram[1]

Odpověď: Myší rodina měla 18 členů.

Poznámka: Hasseovské diagramy (h-diagramy) dovolují podstatně redukovat zadání některých významných relací, jejich grafových reprezentací a diagramových znázornění. Přechod od orientovaného grafu uspořádané množiny k jeho h-diagramu znamená zjednodušení:

- odstraníme všechny smyčky v uzlech,
- odstraníme všechny „tranzitivní“ hrany,
- uspořádáme uzly v rovině tak, aby všechny šipky vedly vzhůru,
- odstraníme orientaci šipek.

Jednu z možností, jak se dopracovat k Pascalovu trojúhelníku, představují sportovní úlohy. Následující problém je převzatý z [2]. Řešení je možné převést na hledání všech možných cest v orientovaném grafu.

PROBLÉM 4

Hokejový zápas skončil výsledkem 5 : 3. *Kolik různých průběhů mohl mít?*

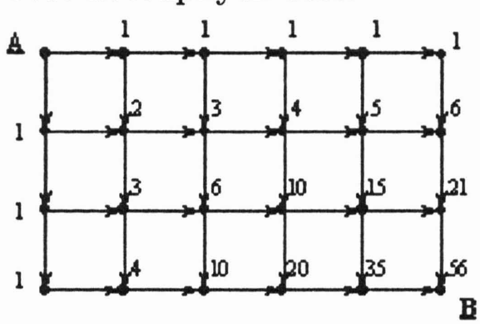
Řešení: Následující schéma zachycuje jeden z možných průběhů zápasu.

---

[1]Obvyklé znázornění hasseovského diagramu je takové, že větší prvek je nad menším. Na obr. 3b je tomu naopak. Pozn. red.

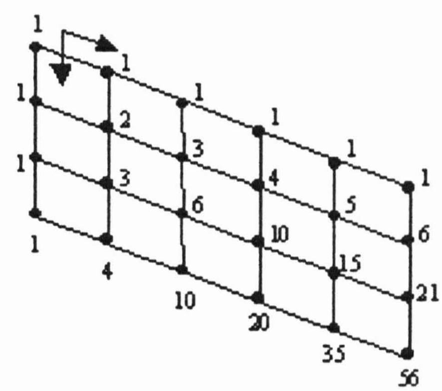
0 : 0	1 : 0	2 : 0	3 : 0	4 : 0	5 : 0
0 : 1	1 : 1	2 : 1	3 : 1	4 : 1	5 : 1
0 : 2	1 : 2	2 : 2	3 : 2	4 : 2	5 : 2
0 : 3	1 : 3	2 : 3	3 : 3	4 : 3	5 : 3

Na obr. 4a,b je uveden graf situace a příslušný h-diagram. Uzly odpovídají jednotlivým stavům, šipka znázorňuje přechod z jednoho stavu do druhého. Hledáme počet cest vedoucích do jednotlivých bodů kosočtvercové, resp. kosodélníkové sítě. Směr postupu je dán vyznačenými šipkami. Číslo u uzlu představuje počet dostupných cest.



A ... výchozí uzel (stav 0 : 0)
B ... cílový uzel (stav 5 : 3)

Obr. 4a: Graf situace



Obr. 4b: h-diagram

Odpověď: Počet všech možných průběhů zápasu je 56.

Poznámka: Způsob nalezení počtu všech možných cest ve čtvercových sítích popisuje Kopka [4]. Daný počet je možno matematicky určit použitím kombinatorického vztahu pro $(m+n)$ prvků a přesunout se tak o úroveň výš – na střední školu. Jednotlivá čísla m, n udávají počet nutných posunů v daném směru, abychom se dostali z daného místa A do určeného místa B. Vyjádříme-li tyto přesuny pomocí šipek $\downarrow$, $\rightarrow$, je v našem případě $m = 5$, $n = 3$. Dostáváme tak počet hledaných cest

$$C = (m, n) = \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!} = \frac{(5+3)!}{5! \cdot 3!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

Uvedený vztah může studentům na střední škole posloužit k ověření správnosti nalezeného počtu hledaných cest. Úlohy zaměřené na prohledávání čtvercových, resp. kosodélníkových a jiných sítí nevyžadují speciální matematické dovednosti, jsou zajímavé, motivující a je možno využít je pro nácvik procházení bludišti. Poskytují mnoho možností na vytváření tzv. divergentních úloh [1]. Divergentní úlohy jsou velmi důležité, protože vyžadují aktivní poznávací činnost, hledání, zkoumání, objevování, vytváření nových strategií a metod řešení a tím vlastně vedou žáka, resp. studenta k uplatnění tvořivých myšlenkových schopností použití heuristických strategií. Myšlenkové procesy při řešení těchto úloh jsou procesy, při nichž je řešení zaměřené do šířky – produkuje různé nápady, alternativy, hypotézy.

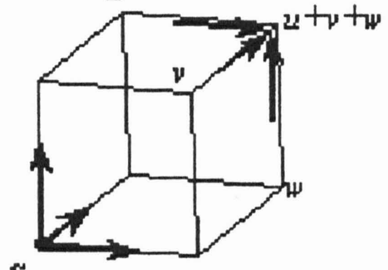
U následujícího problému se přesuneme z dvojrozměrného do trojrozměrného prostoru. Budeme hledat počet cest v krychlových sítích (obr. 5).

PROBLÉM 5
Cestování po krychli

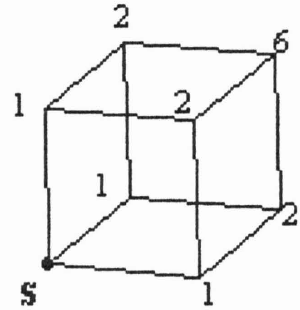
Zkoumejte počet nejkratších cest z bodu S do zbývajících vrcholů krychle.

Řešení: Řešení je uvedeno na obr. 5a,b. Postupujeme podobně jako u problému 2. Do daného vrcholu se dostaneme prostřednictvím předcházejících, nevracíme se zpět, postupujeme jen ve směru šipek. Sčítáme počet cest, které vedou do vrcholů, z nichž vedou šipky (viz obr. 5a,b).

Obr. 5



Obr. 5a

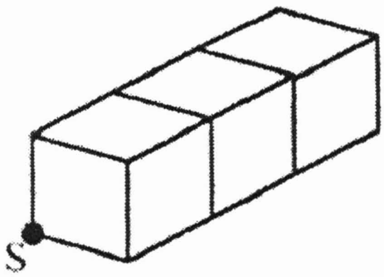


Obr. 5b

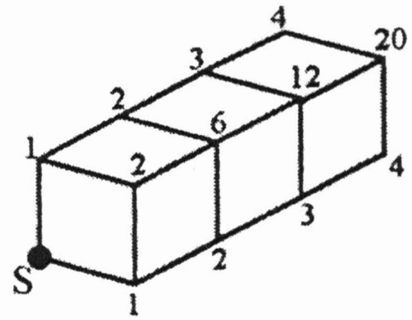
PROBLÉM 6
Cestování po soustavě krychlí

Kolik nejkratších cest z bodu S vede do všech viditelných vrcholů tří krychlí?

Řešení: je uvedeno na obr. 6a.



Obr. 6

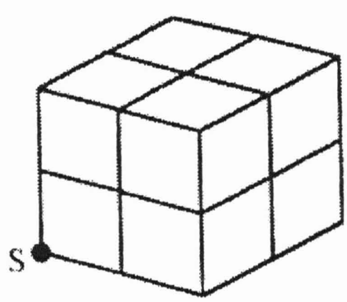


Obr. 6a

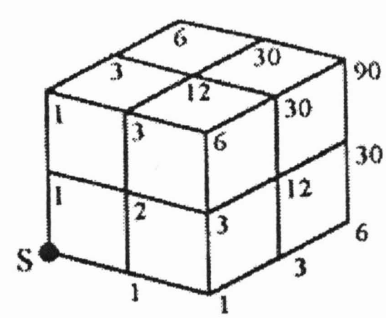
PROBLÉM 7
Cestování po soustavě krychlí

Zjistěte počet nejkratších cest z bodu S do všech viditelných bodů (vrcholů) dvou vrstev krychlí.

Řešení: je uvedeno na obr. 7a.



Obr. 7



Obr. 7a

Poznámka: Podobně jako u problémů 1–4 je možno počet cest vedoucích mezi dvěma místy po krychlové síti určit pomocí vztahu

$$C(p,d,h) = \frac{(p+d+h)!}{p! \cdot d! \cdot h!},$$

kde p, (resp. d,h) značí počet kroků vpravo, resp. dozadu, nahoru.

Problémy 6, 7 řadíme mezi obtížnější z hlediska prostorové představivosti o uspořádání krychlí a přípustného pohybu. Doporučuji k jejich řešení přistoupit na střední škole.

Závěr

Netypické problémové úlohy se nevyznačují až tak svojí matematickou obtížností, jako spíše novostí a nezvyklostí problémové situace. Problémovou úlohou může být pro žáka či studenta i úloha s triviálním řešením, pokud nepatří mezi řešiteli známé úlohy. Úloha je pro řešitele neznámá jen do okamžiku jejího vyřešení, kdy se stává rutinní úlohou. Ale právě okamžik, kdy je problém vyřešen, je velice důležitý pro objevování nových metod řešení, aplikaci matematických zákonitostí a je vlastním prostředkem matematického vzdělávání žáka/studenta. Řešení výše uvedených problémů je jednou z možností, jak rozvíjet heuristické uvažování a uvědomovat si aplikaci získaných poznatků při řešení atypických problémů.

Literatura

[1] Cirjak, M., *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh (Tvorivosť v matematike)*, Essox, Prešov, 2000.

[2] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky*, 2. vyd., SPN, Bratislava, 1990.

[3] Koman, M., *Dejte hlavy dohromady a řešte úlohy*, Edice Praxe učitele matematiky-fyziky-informatiky. Prometheus, Praha, 1995.

[4] Kopka, J., *Hrozny problémů ve školské matematice*, Acta universitatis Purkynianae 40, Ústí nad Labem, 1999.

[5] Larson, L. C., *Metódy riešenia matematických problémov*, ALFA, Bratislava, 1983.

[6] *Precalculus and Discrete Mathematics.* The University of Chicago School Mathematics Project. Scott, Foresman and Company, Glanview, Illinois, 1992.

[7] Příhonská, J., Teorie grafů v učivu základní školy, *In: Mezinárodní věd. konf. Matematika v príprave učiteľov 1.st. ZŠ,* Liptovský Trnovec, 2001, s. 40–47.

[8] Příhonská, J., Vild, J., Hasseovské diagramy ve výuce, *In: Mezin. konference kateder matematiky připravujících učitele matematiky,* Liberec, září 2000, s. 91–96.

RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
TUL v Liberci
Hálkova 6
461 17 Liberec
e-mail: jana.prihonska@tul.cz