Dag Hrubý

Který čtyřúhelník má největší obsah?

Učitel matematiky, Vol. 15 (2007), No. 4, 193–198

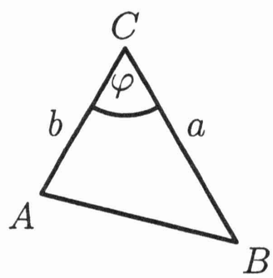
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150657

KTERÝ ČTYŘÚHELNÍK MÁ NEJVĚTŠÍ OBSAH?

DAG HRUBÝ

Cílem článku je ukázat užití diferenciálního počtu v geometrii. Dříve než přistoupím k hlavní úloze tohoto článku, kterou bude nalezení čtyřúhelníku maximálního obsahu, ukáži několik souvisejících úloh.

Úloha 1: Který trojúhelník o stranách a, b má největší obsah?



Řešení: Je-li φ velikost úhlu, který svírají strany a, b v trojúhelníku, pak

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\varphi \qquad (1)$$

Vzhledem k $\sin\varphi \leq 1$ je $\frac{1}{2}ab\sin\varphi \leq \frac{1}{2}ab$. Odtud plyne $S_{max} = \frac{1}{2}ab$. Daný trojúhelník musí být pravoúhlý. Na vztah (1) se také můžeme dívat jako na funkci proměnné φ.

$$S(\varphi) = \frac{1}{2}ab\sin\varphi.$$

Nyní budeme hledat extrém této funkce. Pro první derivaci dostáváme

$$\frac{dS}{d\varphi} = \frac{1}{2}ab\cos\varphi$$

Dále je $\frac{dS}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}ab\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$. Bod $\varphi = \frac{\pi}{2}$ je bod podezřelý z extrému. Snadno se přesvědčíme, že v tomto bodě má funkce $S = S(\varphi)$ maximum a proto $S_{max} = \frac{1}{2}ab$.

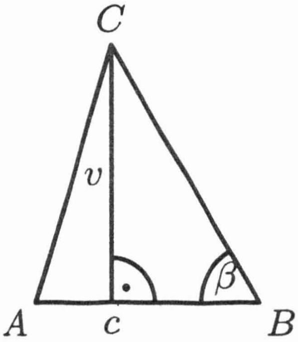
Úloha 2: Který rovnoramenný trojúhelník má největší obsah?

Řešení: Je-li φ velikost úhlu, který svírají obě ramena v trojúhelníku, pak

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin\varphi \tag{2}$$

Další postup je stejný jako v úloze (1), stačí položit $a = b$. Nakonec dostáváme $S_{max} = \frac{1}{2}a^2$.

Úloha 3: Mezi všemi trojúhelníky o straně délky a a protilehlém úhlu velikosti α najděte trojúhelník maximálního obsahu.



Řešení: V trojúhelníku ABC označme β velikost úhlu při vrcholu B, $c = |AB|$ a $v = v_c$. Pro obsah trojúhelníku platí

$$S = \frac{1}{2}cv \tag{3}$$

Pro stranu c platí $c = v(\cot\alpha + \cot\beta)$. Pro obsah trojúhelníku platí $S = \frac{1}{2}v^2(\cot\alpha + \cot\beta)$. Dále je $v = a\sin\beta$. Po dosazení do (3) dostáváme

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin^2\beta(\cot\alpha + \cot\beta).$$

Tento vztah není zřejmě z pohledu planimetrie ideální pro diskuzi o maximálním obsahu dan0ho trojúhelníku. Pokud si ale uvědomíme, že množinou všech vrcholu C takových trojuhelníku je množina všech bodu v rovině, ze kterých je vidět úsečku velikosti a pod úhlem α, pak po provedení náčrtku snadno odhadneme, že daný trojúhelník je rovnoramenný, a platí $\beta = \gamma$. My se však podíváme na vztah (3) jako na funkci $S = S(\beta)$ proměnné β a budeme hledat její extrém. Pro první derivaci platí

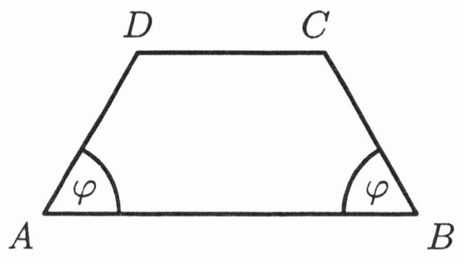
$$\frac{dS}{d\beta} = a^2 \sin\beta \cos\beta(\cot\alpha + \cot\beta) - \frac{1}{2}a^2.$$

Dále je $\dfrac{dS}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \sin\beta\cos\beta(\cot\alpha + \cot\beta) = \dfrac{1}{2}$. Odtud postupnými úpravami plyne $2\sin\beta\cos\beta\cot\alpha + 2\cos^2\beta - 1 = 0$. Nakonec dostáváme pro extrém podmínku

$$\cot\alpha + \cot 2\beta = 0$$

Tato podmínka je ekvivalentní s rovností $\alpha + 2\beta = \pi$. Ponechám už na čtenáři, aby se přesvědčil, že v bodě $\beta = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$ má naše funkce maximum. Pro úhel γ dostáváme $\gamma = \pi - \alpha - \beta = 2\beta - \beta = \beta$. Hledaný trojúhelník je tedy rovnoramenný.

Úloha 4: Mezi všemi lichoběžníky s vlastností $|BC| = |CD| = |DA| = b$ najděte lichoběžník maximálního obsahu.



Řešení: V lichoběžníku $ABCD$ označíme φ velikosti úhlu při vrcholech A, B, protože daný lichoběžník je rovnoramenný.

Při označení $|AB| = a$ dostáváme pro obsah lichoběžníku $S = \left(\dfrac{a+b}{2}\right) v$. Dále je $\sin\varphi = \dfrac{v}{b}$ a proto $S = \left(\dfrac{a+b}{2}\right) b \sin\varphi$. Nyní si ještě vyjádříme a pomocí b a φ. Zřejmě platí $\cos\varphi = \dfrac{a-b}{2b}$ a pro a pak dostáváme $a = b + 2b\cos\varphi$. Pro obsah lichoběžníku platí

$$S = b^2(1 + \cos\varphi)\sin\varphi \tag{4}$$

Nyní budeme hledat extrém funkce $S(\varphi) = b^2\sin\varphi + b^2\sin\varphi\cos\varphi$. Pro první derivaci dostáváme

$$\frac{dS}{d\varphi} = b^2\cos\varphi + b^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi$$

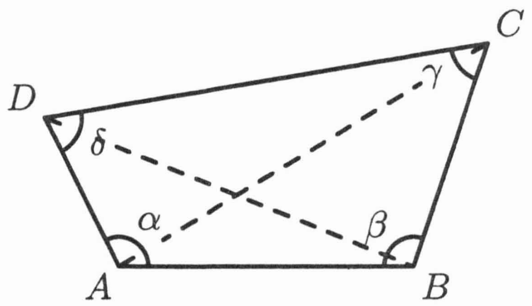
Dále je $\dfrac{dS}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi + \cos^2\varphi = \sin^2\varphi \Leftrightarrow 2\cos^2\varphi + \cos\varphi -$ $- 1 = 0$. Tato rovnice má kořeny $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ a $\cos\varphi = -1$, z nichž vyhovuje pouze kořen $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$, resp. $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Tento bod je bod podezřelý z extrému. Snadno se přesvědčíme, že v tomto bodě má funkce $S = S(\varphi)$ maximum a proto $S_{max} = b^2\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2} =$ $= \dfrac{3\sqrt{3}}{4}b^2$.

Nyní jsme, doufám, připraveni k hlavní úloze tohoto článku.

Úloha 5: Mezi všemi čtyřúhelníky, které mají dané velikosti stran a, b, c, d najděte čtyřúhelník maximálního obsahu.

Řešení: Ve čtyřúhelníku $ABCD$ označme α, β, γ, δ velikosti úhlu při vrcholech A, B, C, D a položme $|AB| = a, |BC| = b, |CD| =$ $= c, |DA| = d$. Pro obsah čtyřúhelníku $ABCD$ zřejmě platí

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\beta + \frac{1}{2}cd\sin\delta \tag{5}$$



Na předcházející vztah (5) se můžeme dívat jako na funkci dvou proměnných $S = S(\beta, \delta)$. Abychom mohli počítat v duchu předcházejícíh úvah, musíme jednu proměnnou vyjádřit pomocí druhé. Rozhodněme se, že vyjádříme δ pomocí β, resp. $\sin\delta$ pomocí $\sin\beta$.

Uvažujme trojúhelníky ACD a ABC a pro stranu AC použijeme dvakrát kosinovou větu. Dostáváme

$$c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$$

Odtud plyne

$$\cos\delta = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos\beta}{2cd} = \\ = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2cd} + \frac{ab}{cd}\cos\beta$$

Pro zjednodušení položme

$$A = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2cd} \qquad B = \frac{ab}{cd}.$$

Můžeme tedy psáti $\cos\delta = A + B\cos\beta$. Dále je

$$\sin\delta = \sqrt{1 - (A + B\cos\beta)^2},$$

protože $0 < \beta < \pi$. Po dosazení do (5) dostáváme

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\beta + \frac{1}{2}cd\sqrt{1 - (A + B\cos\beta)^2}$$

Nyní jsme dostali funkci jedné proměnné $S = S(\beta)$.

$$\frac{dS}{d\beta} = \frac{1}{2}ab\cos\beta + \frac{1}{2}cd\frac{(A + B\cos\beta)B\sin\beta}{\sqrt{1 - (A + B\cos\beta)^2}}$$

Po dosazení za $\cos\delta = A + B\cos\beta$, $B = \dfrac{ab}{cd}$ dostaneme

$$\frac{dS}{d\beta} = \frac{1}{2}ab\cos\beta + \frac{1}{2}ab\frac{\cos\delta\sin\beta}{\sin\delta}$$

$\dfrac{dS}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow \sin\delta\cos\beta + \sin\beta\cos\delta = 0 \Leftrightarrow \sin(\beta + \delta) = 0 \Leftrightarrow \beta +$ $+ \delta = \pi$. Odtud nutně plyne $\alpha + \gamma = \pi$. Daný čtyřúhelník musí být tětivový. Po dosazení do (5) dostaneme pro obsah tětivoveho čtyřúhelníku vzorec

$$S = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\beta$$

Tento vzorec samozřejmě platí pro čtverec a obdelník, jak se můžeme dosazením přesvědčit.

Literatura

[1] Gillman, L., Mc Dowell, R. H., *Matematická analýza*, SNTL, Praha, 1983

RNDr. Dag Hrubý
Gymnázium, A. K. Vítáka 452
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz