Petr Eisenmann

O jednom experimentu ve výuce matematiky na gymnáziu

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 2, 122–124

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150649`

O JEDNOM EXPERIMENTU VE VÝUCE MATEMATIKY NA GYMNÁZIU

PETR EISENMANN

Cílem tohoto příspěvku je popsat jeden experiment z výuky matematiky na gymnáziu. Jeho prezentace je vhodná při probírání tématu Diferenciální a integrální počet.

Výchozí situací budiž pokus, který učitel se studenty provede. Do plechového hrnečku nalije asi 0,3 l vroucí vody. Hrneček nechť je tepelně co nejlépe izolován od podložky, například může stát na třech úzkých dřevěných špalíčcích. Do laboratorního stojanu si upevní teploměr, zaznamená teplotu vzduchu v místnosti (T_0) a teploměr po asi 5 minutách zanoří do vody v hrnečku. Po ustálení rtuti v teploměru zaznamená v čase $t = 0$ naměřenou teplotu. Tuto pak zaznamenává se studenty každé 4 minuty. Je velice vhodné výsledky zadávat hned do počítače, a to v programu Excel. Výsledky z našeho experimentu jsou v tabulce 1.

Čas	0	4	8	12	16	20	24	28
Teplota	72	69,5	64	59,5	56	53	50	47,5
Čas	32	36	40	44	48	52	56	60
Teplota	45,5	43,5	42	40,5	39	38	37	35,5

Tab. 1

Mezi zaznamenáváním výsledků učitel se studenty sestaví příslušný matematický model. Motivací může být snaha předpovědět teplotu vody na konci experimentu, tj. po jedné hodině.

Má-li nějaká látka teplotu větší než je teplota jejího okolí, začne se ochlazovat. Budeme předpokládat, že hrneček se po zmíněných pěti minutách ohřál na stejnou teplotu jako voda a okolním prostředím tedy budeme rozumět vzduch v místnosti. Náš model předpokládá, že okamžitá rychlost ochlazování vody je přímo úměrná rozdílu mezi její aktuální teplotou a teplotou jejího okolí. To vyjadřuje diferenciální rovnice

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_0) \tag{1}$$

kde k je číselná konstanta menší než 0, neboť změna teploty látky vyjádřená levou stranou rovnice (derivace teploty podle času) je záporná, látka se ochlazuje.

Řešení lineární diferenciální rovnice (1) zde uvedu pouze velice stručně. Nejprve se separací proměnných vyřeší příslušná homogenní rovnice

$$\frac{dT}{dt} = kT$$

Její obecné řešení

$$T = C \cdot \mathrm{e}^{kt}$$

se posléze metodou variace konstanty změní v obecné řešení rovnice (1)

$$T = T_0 + C \cdot \mathrm{e}^{kt}$$

Nyní je třeba určit neznámé konstanty C a k. Z počáteční podmínky $T(0) = 72$ (viz tab. 1) plyne (teplota okolního vzduchu byla při našem experimentu 23° C) hodnota $C = 49$.

Pro určení konstanty k jsme vzhledem k časovému průběhu experimentu vybrali teplotu vody ve dvanácté minutě měření, tedy $T(12) = 59{,}5$. Hodnota konstanty k potom vyjde přibližně – 0,024 54.

Partikulární řešení rovnice (1) odpovídající podmínkám $T(0) = 72$ a $T(12) = 59{,}5$, tedy hledaná závislost teploty vody na čase má předpis

$$T = 23 + 49 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}02454t} \tag{2}$$

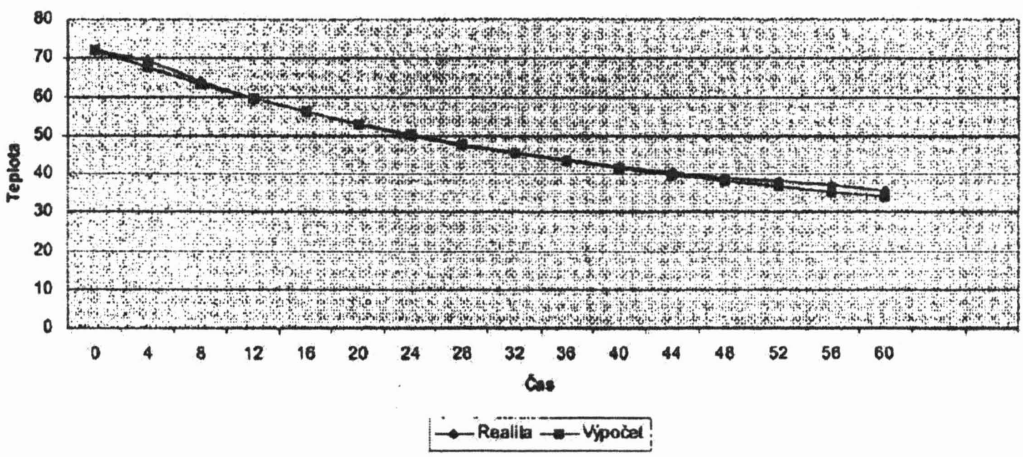
Je vhodné nyní pomocí Excelu vypočtené hodnoty této funkce zobrazit do jedné tabulky vedle naměřených a vše ještě doprovodit obrázkem grafů obou závislostí (obr. 1). V tab. 2 je v prvním řádku uveden čas v minutách, ve druhém řádku naměřená teplota vody ve stupních Celsia a ve třetím řádku funkční hodnoty funkce (2) zaokrouhlené na jedno desetinné místo.

0	4	8	12	16	20	24	28
72	69,5	64	59,5	56	53	50	47,5
72	67,5	63,3	59,5	56,1	53	50,2	47,6
32	36	40	44	48	52	56	60
45,5	43,5	42	40,5	39	38	37	35,5
45,3	43,2	41,4	39,6	38,1	36,7	35,4	34,2

Tab. 2

Při závěrečné diskusi se studenty o souladu naměřených hodnot s funkčními hodnotami funkce (2) je vhodné upozornit i na jednu nedokonalost použitého modelu. Zatímco ve skutečnosti se po určité době teplota vody vyrovná teplotě okolí, v použitém matematickém modelu je tomu tak až v limitním případu

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = 23$$



Obr. 1

Doc. PaedDr. Petr Eisenmann, CSc.
Katedra matematiky PřF UJEP Ústí nad Labem
České mládeže 8
400 96 Ústí nad Labem
e-mail: eisenmann@sci.ujep.cz