Učitel matematiky

Hana Mahnelová

Objevení Ludolfova čísla pomocí školského matematického softwaru CABRI

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 2, 107–114

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150647

OBJEVENÍ LUDOLFOVA ČÍSLA POMOCÍ ŠKOLSKÉHO MATEMATICKÉHO SOFTWARU CABRI

HANA MAHNELOVÁ

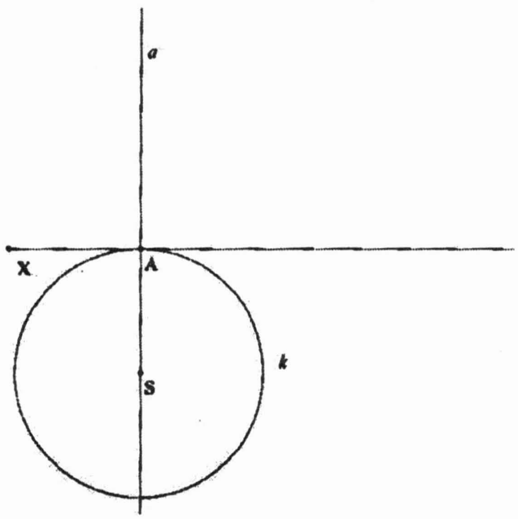
Při výpočtu obsahu a obvodu kruhu se žáci na základní škole setkají s významnou konstantou – číslem π. Existuje řada způsobů, jak existenci a hodnotu tohoto čísla žákům přiblížit. Velmi užívaný a přesvědčivý způsob je ten, kdy žáci změří obvod kulatého předmětu, který si každý přinesl do výuky – lahve, sklenice, trubky, apod., a tento obvod vydělí průměrem daného předmětu. Výsledkem takového pokusu je přibližná hodnota čísla π. Měření obvodu probíhá většinou tak, že žáci kulatý předmět obalí do papíru, ryskami zaznamenají na papír obvod předmětu a následně papír rozvinou do roviny a změří vzdálenost mezi ryskami. Podobně lze využít i provázku. Po vydělení obvodu průměrem pak žáci zjišťují, že vypočtené číslo je přibližně stále stejné a to při různých poloměrech kulatých pomůcek.

Dnes už se na většině škol při výuce pracuje s počítačem, který je velmi silným motivačním prostředkem. V následující části provedeme obdobný pokus pomocí dynamického softwaru Cabri. V bodech 1 – 10 je podrobně popsána příprava interaktivního obrázku, který mají na začátku řešení problému žáci osmé třídy před sebou, aby odvodili závislost poměru délky oblouku kružnice a jejího průměru a sami objevili velmi důležitou konstantu – číslo π. Cílem je sestrojení obrázků, které jsou analogické „mechanickému" pojetí. Jedná se o způsob přenesení délky oblouku kružnice na polopřímku.

1. Zvolíme bod X, sestrojíme polopřímku bodem X, na ní umístíme **Bod A na objektu**.

2. Bodem A vedeme **Kolmici** a k polopřímce, zvolíme **Bod** S **na objektu** přímka a.

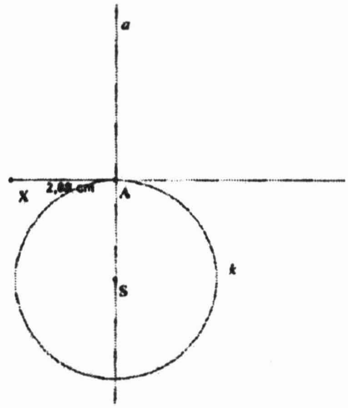
3. Zobrazíme **Kružnici** k se středem S procházející bodem A. Výsledkem je následující obrázek, přičemž lze volně pohybovat bodem A po polopřímce $\rightarrow XA$ a bodem S po přímce a. Je tak umožněno měnit poloměr kružnice k, obr. 1.



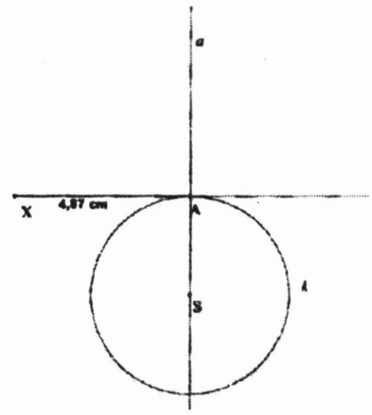
Obr. 1

4. Chceme-li průběžně zjišťovat délku kruhového oblouku, budeme potřebovat měřit vzdálenost bodů X, A. Vybereme z nabídky rolety třetího tlačítka zprava **Vzdálenost a délka**, kliknutím myši označíme body X, A a na obrazovce se objeví v okénku komentáře číslo vyjadřující aktuální délku úsečky XA. Pohybem bodu A se můžeme přesvědčit o jeho neustále se měnící hodnotě, obr. 2, obr. 3. (Pro lepší vizualizaci byla nově vytvořena úsečka XA a zvolena největší možná síla čáry, která ji vykresluje.)

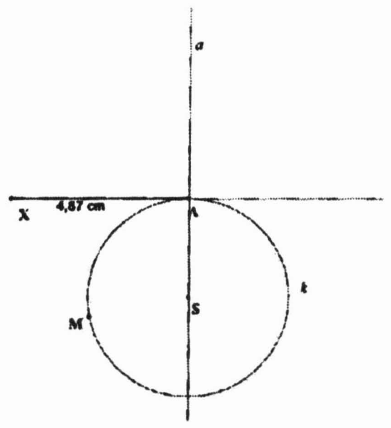
5. Pro vytvoření iluze „točícího se kola" je třeba bod na obvodu kružnice k. Označme jej M. Bude se pohybovat tak, že jeho startovním místem bude poloha počátečního bodu polopřímky $\rightarrow XA$ bod X a koncovým místem poloha bodu A.



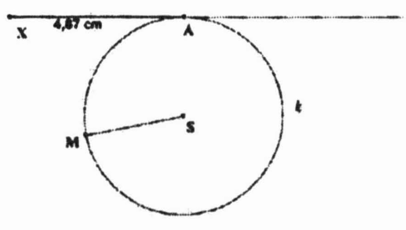
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

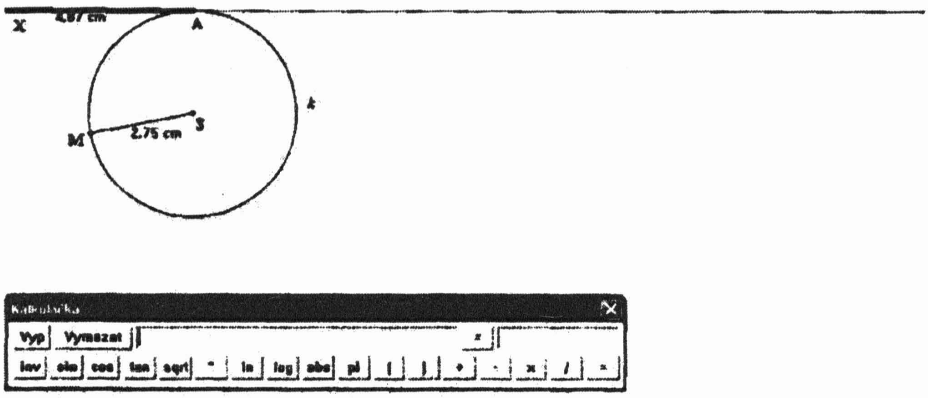


Obr. 5

Vybereme z nabídky v pořadí pátého tlačítka zleva **Nanést délku**, označíme kurzorem číslo (změřenou vzdálenost $|XA|$), kružnici k a bod A. Vznikne nový bod M vázaný svojí polohou na kružnici k a délkou oblouku MA rovnající se délce úsečky XA, obr. 4. O správnosti se opět přesvědčíme pohybem bodu A, při kterém se mění poloha $M \in k$ a s ní i velikost $|XA|$.

6. Přímku a skryjeme příkazem **Zobrazit/skrýt** (poslední tlačítko). Vytvoříme úsečku SM, jejíž zobrazení podpoří optický vjem kotálející se kružnice a dráhy bodu M, obr. 5.

7. Zbývá změřit poloměr kružnice k (délka úsečky SM) pomocí



Obr. 6

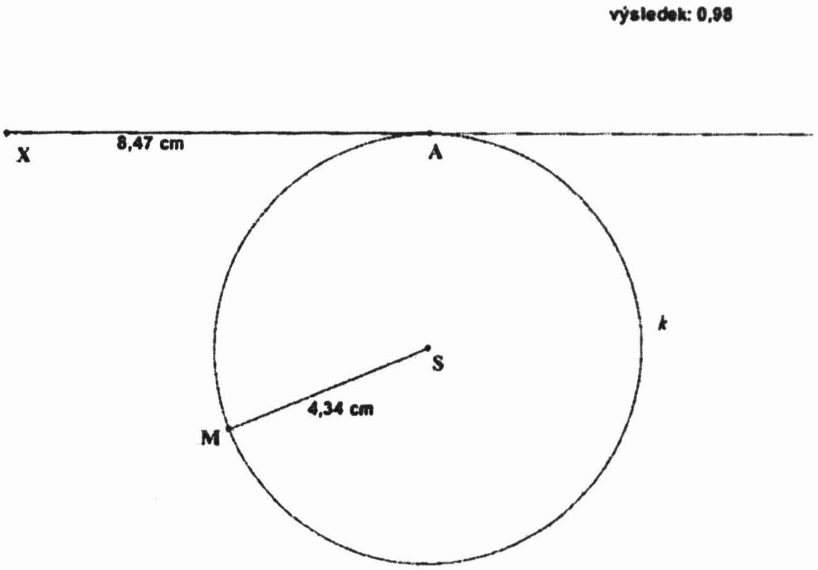
Vzdálenost a délka (v nabídce třetího tlačítka zprava).

8. Cabri geometrie umožňuje kromě grafického znázornění také provádět výpočty. Využijeme proto příkazu **Výpočty** (3. tlačítko zprava). Objeví se na obrazovce kalkulačka s aktivním oknem. Připomeňme, že chceme ukázat, že podíl délky úsečky XA a průměru kružnice je stále stejný. Kurzor je v aktivním okně kalkulačky, myší klikneme na číslo vyjadřující délku $|XA|$. Automaticky se číselný výraz označí jako a a takto zapíše do aktivního okna kalkulačky. Matematickými symboly v její nabídce doplníme výraz, jehož hodnotu budeme chtít počítat, přičemž hodnotu proměnné b získáme poklepnutím na číslo vyjadřující délku $|SM|$. Klikneme-li na rovnítko v okně kalkulačky, zobrazí se výsledek pro aktuální hodnoty proměnných a, b, obr. 6. Levým tlačítkem myši přetáhneme výsledek na plochu obrázku. Stává se tak aktivním výpočtem při pohybu bodem A, okno s kalkulačkou můžeme zavřít.

9. Sledujme, jak se mění poměr délky kruhového oblouku opisujícího bodem M a průměru kružnice k.

10. Zaměřme se nyní na možnost změny poloměru kružnice k.

Při pohybu bodu S dochází také k aktualizaci číselných vyjádření poloměru kružnice a zjišťovaného poměru, obr. 7.

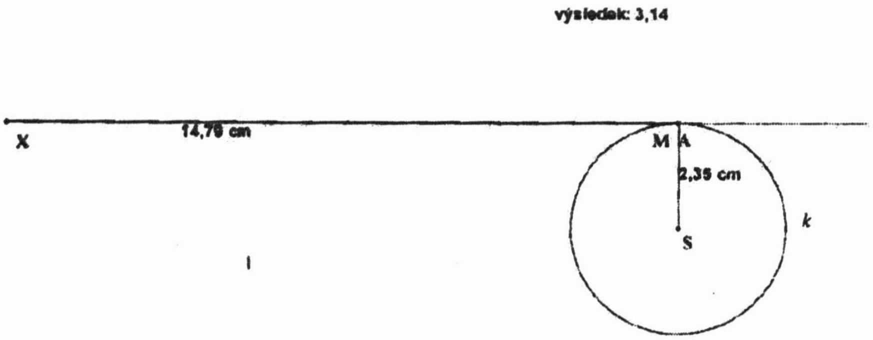


Obr. 7

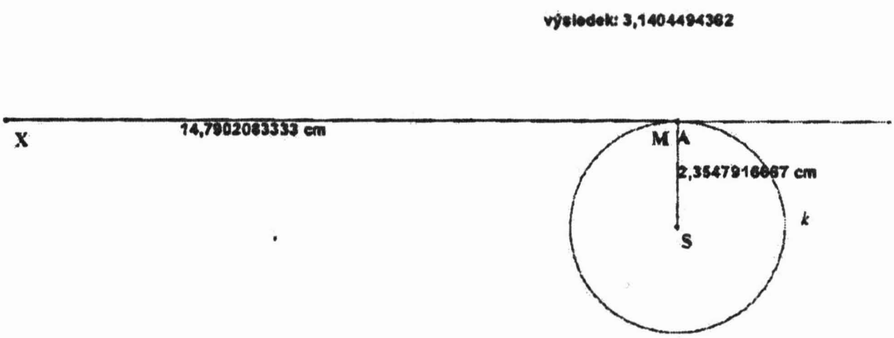
Takto připravený aktivní obrázek dává každému příležitost, aby si sám libovolně zvolil pohybem bodem S velikost kružnice (a tím i její poloměr), objevil konstantní hodnotu poměru obvodu kružnice a jejího průměru, tedy přibližné číselné vyjádření Ludolfova čísla – čísla π, a zjistil, že tato hodnota nezávisí na velikosti kružnice.

Uchopíme-li bod A a jeho pohybem po polopřímce přemístíme kotálením kružnice k bod M do polohy bodu A tak, že se kružnice otočí pouze jednou, ve výsledku se ukáže hodnota 3,14. Každý z žáků si pohybem bodem S volí poloměr kružnice náhodně a zjišťuje, že výsledný poměr mají všichni stejný. Podařilo se jim objevit konstantu, obr. 8.

Pro zpřesnění výpočtu poměru lze nastavit počet desetinných míst, která se zobrazí v měřeních nebo ve výsledcích, pomocí **Nastavit/Nastavit prostředí/Zaokrouhlování a jednotky**. Při zobrazení maximálního počtu desetinných míst se dostaneme např. k těmto výsledkům, obr. 9.



Obr. 8

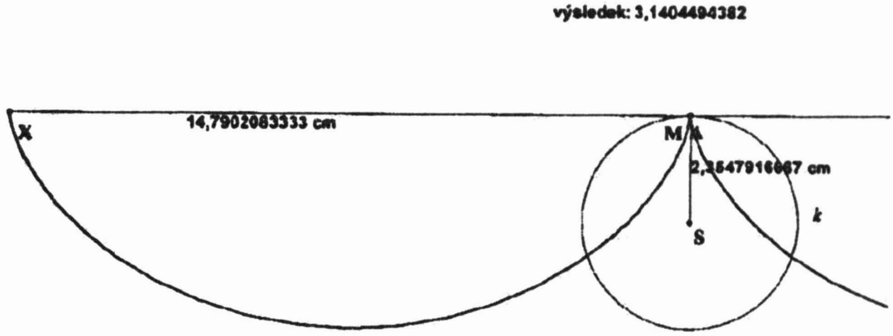


Obr. 9

Pokud si žáci porovnávají hodnotu jimi vytvořené konstanty s tolika desetinnými místy navzájem, případně s tabelovaným údajem, je na místě položit otázku: *Proč se tyto liší?* Nejčastější odpovědí bude, že chyba je v naší ruce, ta nemá takový cit, aby dokázala ještě více přiblížit bod M k bodu A. Jistě se však najde i takový jedinec, který je s výpočetní technikou větší kamarád, a objasní všem, že možnou příčinou je i malá rozlišovací schopnost myši nebo monitoru.

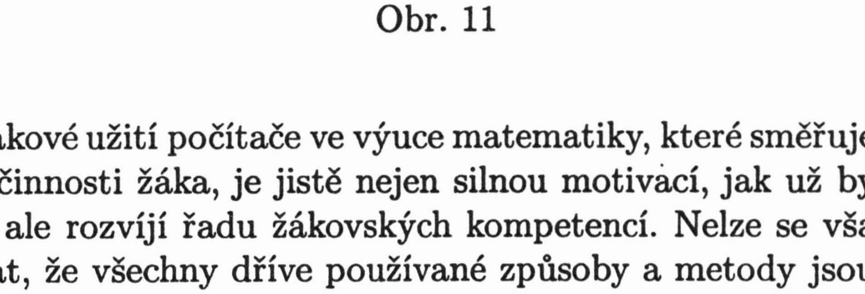
Vhodným dodatkem úlohy je využít možnosti Cabri a ukázat, jakou dráhu opíše bod M, jestliže se kotálí kružnice po přímce. Tuto situaci známe i z běžného života. Např. při jízdě na bicyklu se nejednou zachytí na jednom místě obvodu kola spadlý list (náš bod M). Pohybuje se po křivce zvané cykloida. Aktivujeme příkaz

Množina objektů. Poté nejprve klikneme na bod, který bude danou množinu vytvářet (bod M) a potom na bod, jehož pohybem se daná množina vytváří (bod A). Výsledkem je množina bodů, kterou vytvoří bod M při kotálení kružnice k po přímce $\rightarrow XA$, obr. 10.



Obr. 10

Druhou možností je vybrat z nabídky předposledního tlačítka vpravo **Stopa ano/ne** a kliknout na bod M. Uchopením bodu A a jeho pohybem po polopřímce $\rightarrow XA$ se začne vykreslovat dráha bodu M, obr. 11.



Obr. 11

Takové užití počítače ve výuce matematiky, které směřuje k aktivní činnosti žáka, je jistě nejen silnou motivací, jak už bylo řečeno, ale rozvíjí řadu žákovských kompetencí. Nelze se však domnívat, že všechny dříve používané způsoby a metody jsou dnes již zastaralé. Tak např. při objevování přibližné hodnoty Ludolfova čísla se osvědčily oba způsoby. Z časových důvodů můžeme třeba experimentální měření a výpočet zadat jako domácí úkol a ve škole pak provádět modelování pomocí počítače. S těmi nadanějšími dětmi, kteří už v prostředí Cabri umí pracovat, vytvoříme aktivní obrázek přímo v hodině. Žáci to velmi ocení.

Mgr. Hana Mahnelová
Gymnázium Nymburk
Komenského 779
288 40 Nymburk
e-mail: mahnelova@gym-nymburk.cz