Učitel matematiky

Miroslav Macháček

Hyperbolická grupa shodných zobrazení v Lobačevského rovině

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 2, 84–93

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150644`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2008

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

HYPERBOLICKÁ GRUPA SHODNÝCH ZOBRAZENÍ V LOBAČEVSKÉHO ROVINĚ

MIROSLAV MACHÁČEK

1. Úvod

Shodná zobrazení v tradiční eukleidovské rovině jsou součástí učiva matematiky na základní a střední škole. Zopakujme si nejprve definici shodného zobrazení.

Definice 1.1: Prosté zobrazení v rovině nazýváme shodným zobrazením, právě když pro každé dva body roviny a jejich obrazy v tomto zobrazení platí: $|XY| = |X'Y'|$.

Konkrétně pak shodná zobrazení dělíme na tyto typy:

- identita
- osová souměrnost
- středová souměrnost
- posunutí (translace)
- otočení (rotace)
- posunutá souměrnost

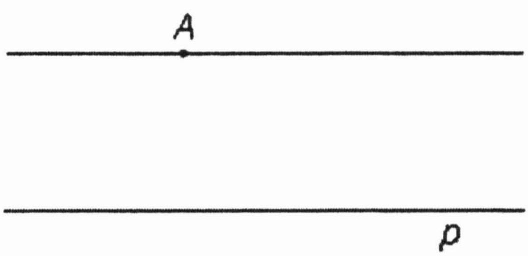
Dále uvedeme důležitou větu týkající se těchto zobrazení, kterou lze jednoduše dokázat.

Věta 1.1: *Každé shodné zobrazení lze složit nejvýše ze tří osových souměrností a shodná zobrazení vytvářejí grupu vzhledem k operaci skládání osových souměrností.*

Je zřejmé, že úlohu základního kamene při výstavbě shodných zobrazení má osová souměrnost, která je určena osou, tj. nějakou přímkou. Podívejme se nyní na klasifikaci, resp. vzájemnou polohu přímek v Lobačevského rovině, která byla žákům na nižších stupních škol doposud skryta. Poté budeme moci zavést shodná zobrazení i v této nové rovině, která bývá nazývána po svém nejvýznamnějším objeviteli N. I. Lobačevském[1] nebo bývá označována jako hyperbolická rovina.

2. Přímky v Lobačevského rovině

V eukleidovské rovině mohou být dvě přímky buď ve vztahu různoběžnosti nebo rovnoběžnosti a především zde platí axiom rovnoběžnosti, který tvrdí, že bodem ležícím mimo danou přímku lze vést právě jednu nerůznoběžku. Tuto přímku nazýváme rovnoběžkou (viz obr. 1).



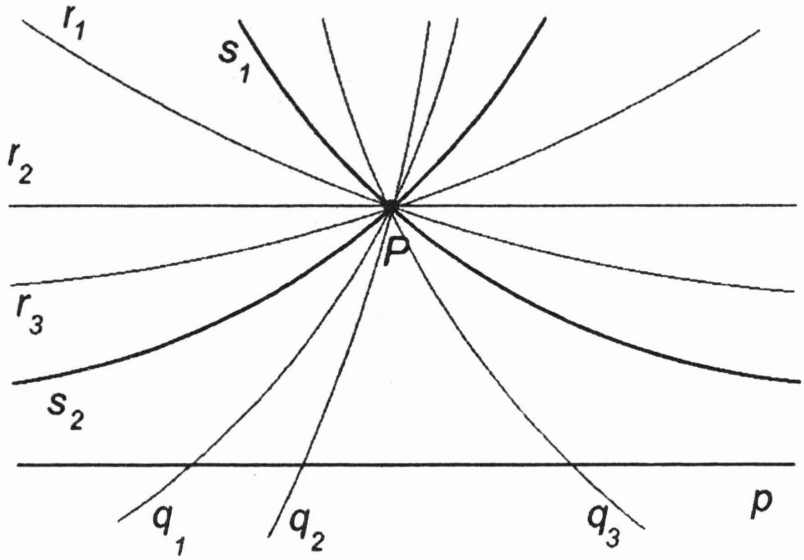
Obr. 1

Naproti tomu v Lobačevského rovině je situace o něco složitější, neboť zde platí následující axiom.

Lobačevského axiom: *Bodem ležícím mimo danou přímku lze vést alespoň dvě nerůznoběžky.*

Lze dokázat, že těchto nerůznoběžek je nekonečně mnoho a navíc mezi nimi jsou dvě přímky, které se chovají k původní přímce „asymptoticky“, tj. vykazují stejnou vlastnost jako např. asymptota hyperboly. Nazýváme je *souběžky*. V Lobačevského rovině existuje tedy nekonečně mnoho „rovnoběžek“ s danou přímkou vedených daným bodem na ní neležícím (nazývají se *rozběžky*), nekonečně mnoho různoběžek a dvě souběžky (viz obr. 2).

[1] Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856), ruský matematik



q_i – různoběžky, r_i – rozběžky, s_i – souběžky

Obr. 2

3. Poincarého[2] kruhový model Lobačevského roviny

V běžné eukleidovské rovině zvolme kruh Γ. Rovinou Lobačevského budeme rozumět vnitřek kruhu Γ, tj. $int(\Gamma)$. *P-body*[3] budou všechny body $int(\Gamma)$. *P-přímky* budou dvojího druhu: **a)** všechny průměry kruhu Γ bez krajních bodů, **b)** otevřené kruhové oblouky, které vzniknou jako průnik $int(\Gamma)$ a eukleidovských kružnic, které ortogonálně protínají hraniční kružnici kruhu Γ. Body hraniční kružnice budou *nevlastní body* Lobačevského roviny.

Zaměříme se nyní na pro nás podstatné vlastnosti tohoto modelu. Důležité bude zavedení délky úsečky v Lobačevského rovině a pojem shodnosti.

Definice 3.1: *P-délku P-úsečky* v Poincarého kruhovém modelu definujeme vztahem

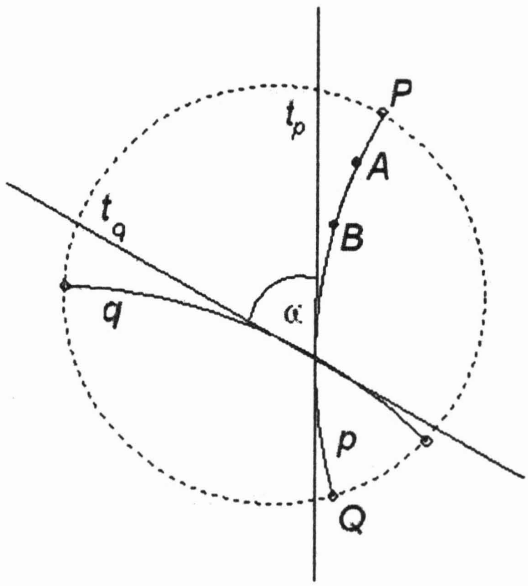
$$d_P(AB) = \left| \ln \left(\frac{|AP|}{|AQ|} \cdot \frac{|BQ|}{|BP|} \right) \right|,$$

[2] Henri Poincaré (1854-1912), francouzský matematik a fyzik

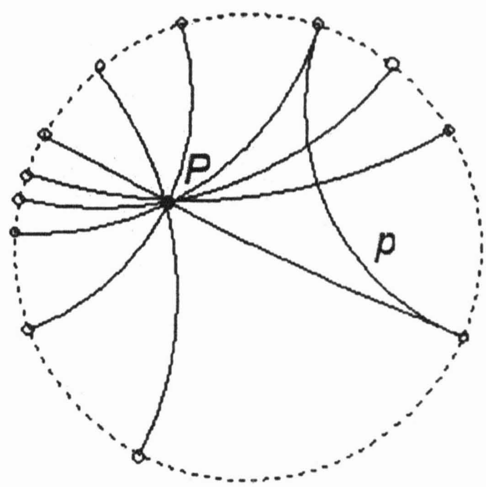
[3] Body hyperbolické roviny znázorněné v Pioncarého modelu. Analogicky pak máme P-úsečky a další P-útvary.

kde P, Q jsou krajní body oblouku nebo průměru, na němž leží úsečka AB a kde $|AP|$, $|AQ|$, $|BQ|$, $|BP|$ jsou klasické eukleidovské vzdálenosti.

P-úsečky jsou pak *P-shodné*, jestliže mají stejnou P-délku. Dále platí: $\lim_{A \to P} d_P(AB) = \infty$ a $\lim_{B \to Q} d_P(AB) = \infty$, tedy P-délky nabývají všech kladných reálných hodnot. *Shodnost úhlů* je analogická s eukleidovskou rovinou, tj. měřit P-úhly mezi dvěma P-přímkami znamená měřit eukleidovské úhly mezi dvěma tečnami k daným dvěma P-přímkám v jejich průsečíku (viz obr. 3).



Obr. 3



Obr. 4

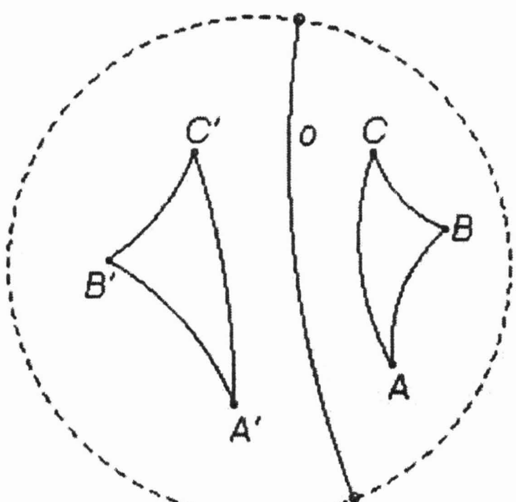
Jak je to s Lobačevského axiomem? Obr. 4 ukazuje, že bodem ležícím mimo danou přímku p může procházet více nerůznoběžek, z nichž dvě vykazují vůči přímce p asymptotickou vlastnost – tyto přímky jsou souběžky, ostatní nerůznoběžky jsou rozběžky a poslední skupinou přímek jsou klasické různoběžky.

Soustředili jsme se především na pojem shodnosti úseček a úhlů v tomto modelu, neboť níže se budeme věnovat shodným zobrazením v Lobačevského rovině a k prezentaci využijeme právě tento model neeukleidovské geometrie.

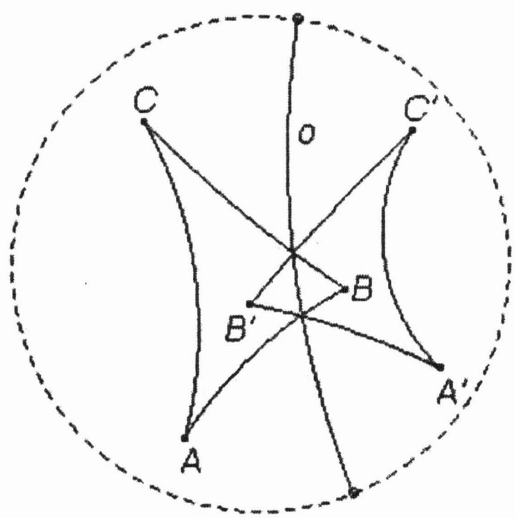
4. Osová souměrnost v Lobačevského rovině

Osová souměrnost je určena osou, tj. přímkou. Budeme zobrazovat nějaký jednoduchý rovinný útvar, např. trojúhelník. Mějme tedy dány P-trojúhelník ABC a P-přímku o, podle které trojúhelník zobrazíme v modelu, který jsme výše popsali:

$$O(o) : \triangle ABC \to \triangle A'B'C'$$



Obr. 5a



Obr. 5b

Změřme nyní délky stran trojúhelníků a velikosti jejich vnitřních úhlů. Odpovídající si strany a úhly jsou shodné, pracujeme tedy se shodným zobrazením stejně jako v eukleidovské rovině.[4] Navíc z obr. 5b je patrná další analogie s klasickou rovinou, na P-ose o se totiž nacházejí všechny samodružné body tohoto zobrazení. Dále si můžeme všimnout, že i zde platí, že osová souměrnost je shodnost nepřímá.

5. Středová souměrnost v Lobačevského rovině

Středová souměrnost, která je určena středem, je shodné zobrazení a zároveň ji lze složit ze dvou osových souměrností s osami, které jsou vzájemně kolmé. Bude předchozí věta platit i v Lobačevského rovině? Vytvoříme si příslušnou situaci v Poincarého modelu.

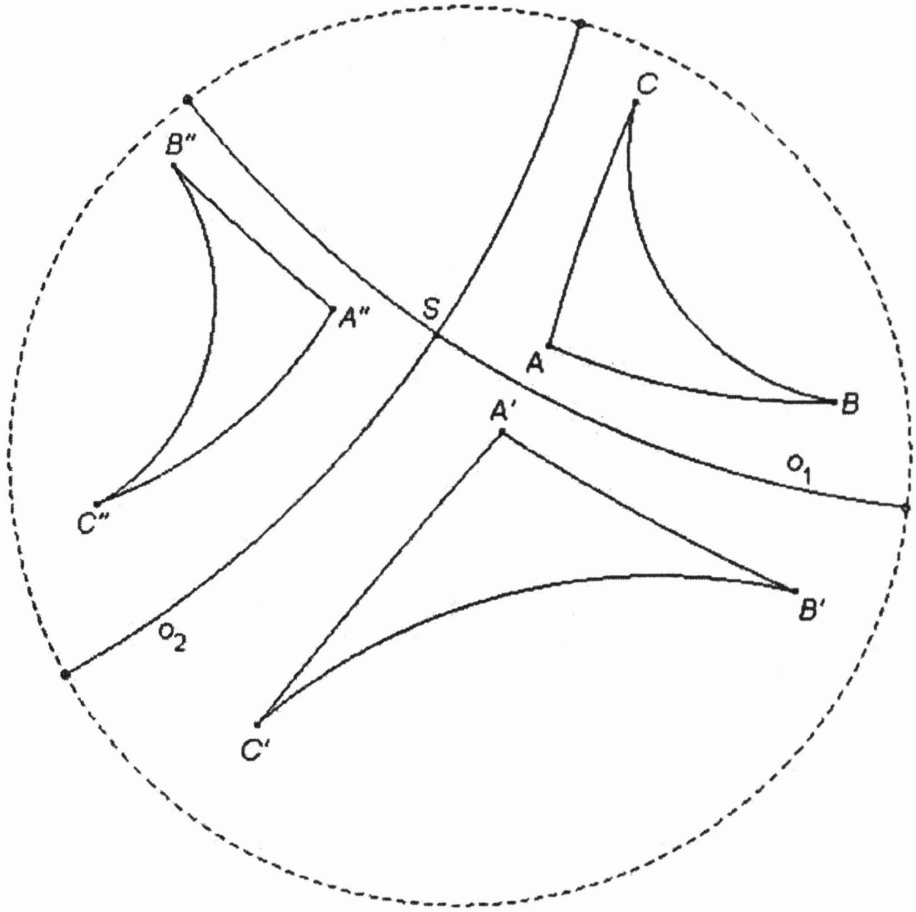
[4] Pozor, v Lobačevského geometrii platí věta uuu o shodnosti trojúhelníků, stačilo by nám tedy studovat jen vnitřní úhly v trojúhelnících!

Složili jsme tedy dvě osové souměrnosti s ortogonálními P-osami o_1 a o_2, bod $S \in o_1 \cap o_2$ bude středem středové souměrnosti S(S). Zobrazme $\triangle ABC$ postupně v těchto osových souměrnostech:

$$O(o_1) : \triangle ABC \to \triangle A'B'C'$$
$$O(o_2) : \triangle A'B'C' \to \triangle A''B''C''$$

a podívejme se, zda platí:

$$S(S) : \triangle ABC \to \triangle A'B'C'.$$



Obr. 6

Skutečně je tomu tak, oba trojúhelníky jsou P-shodné, vzor, obraz a střed souměrnosti leží na P-přímce a P-vzdálenost středu od vzoru a obrazu je P-shodná. Navíc zjišťujeme, že středová souměrnost je přímá shodnost.

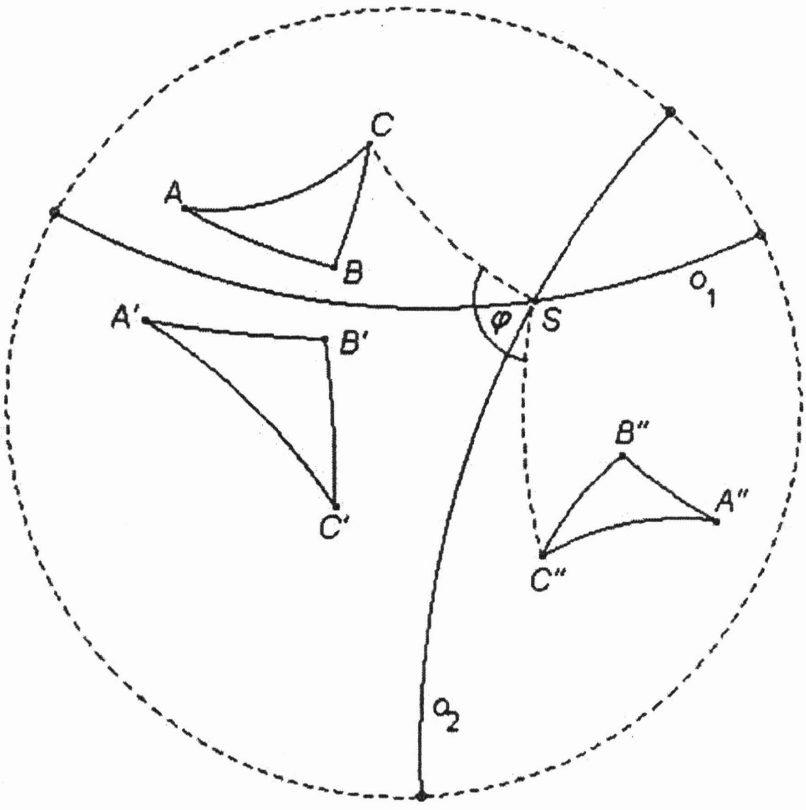
6. Otočení (rotace) v Lobačevského rovině

Mějme dány dvě P-různoběžky o_1 a o_2, které nejsou na sebe kolmé. Opět zobrazíme postupně trojúhelník ABC v osových souměrnostech $O(o_1)$ a $O(o_2)$ a ukážeme, že platí (viz obr. 7):

$$R(S, \varphi) : \triangle ABC \to \triangle A''B''C'',$$

kde S je střed otočení a φ úhel otočení.

Skutečně, $|\sphericalangle ASA'| = |\sphericalangle BSB'| = |\sphericalangle CSC'| = \varphi$ a zároveň vzor a obraz jsou od středu rotace stejně vzdáleny. Navíc stejně jako v klasické rovině zde platí, že úhel rotace je dvojnásobkem úhlu dvou os, které otočení generují. Opět jde o přímou shodnost.



Obr. 7

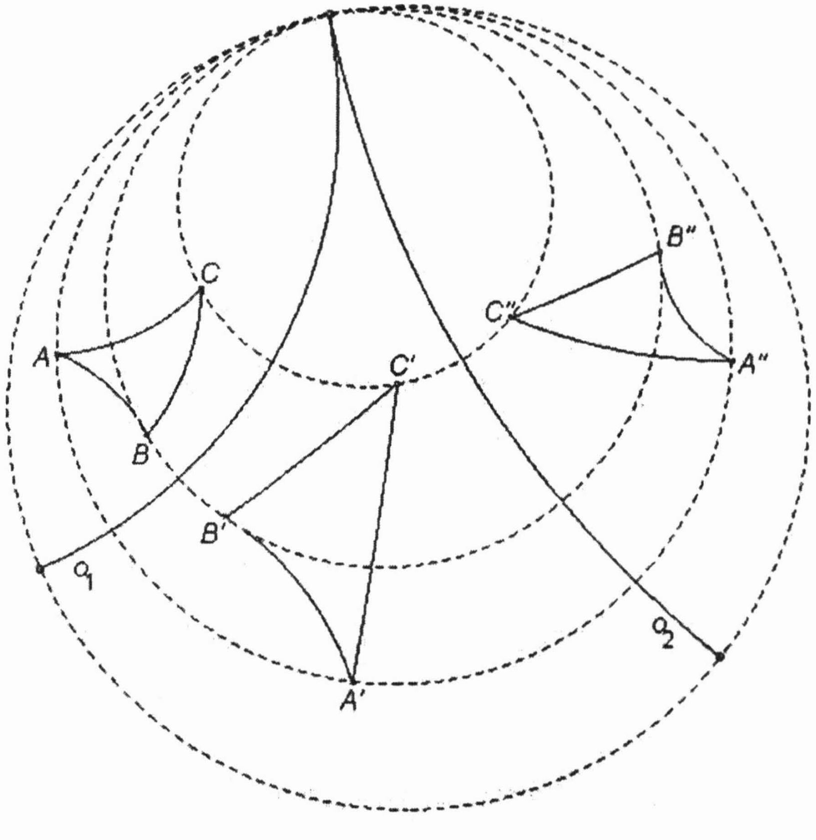
7. Posunutí (translace) v Lobačevského rovině

V klasické rovině je posunutí jednoznačně dáno vektorem posunutí, který určuje délku a směr posunutí. Platí také, že posunutí lze složit ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami.

V Lobačevského rovině však neexistují „rovnoběžky“ ve smyslu ekvidistant, nýbrž máme zde souběžky a rozběžky, které mají jiné vlastnosti než eukleidovské rovnoběžky. Zapomeňme tedy na klasické posunutí a zkusme složit dvě osové souměrnosti pro oba zbývající případy vzájemné polohy os.

7.1 Skládání osových souměrností s osami jako souběžkami

Dostáváme zajímavou situaci v Lobačevského rovině, kterou ilustruje obr. 8. Po změření úhlů a stran v $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ zjišťujeme, že i v tomto případě dostáváme shodné zobrazení a vzor a obraz v příslušných osových souměrnostech se nacházejí na zvláštních křivkách, které se nazývají cykly. Nebudeme zde cykly definovat, jen zmíníme, že k nim dojdeme zobecněním definice kružnice.[5] Cykly na obr. 8 jsou určeny svazkem příslušných souběžek; je to patrné z toho, že všechny křivky se sbíhají v jednom nevlastním bodě.

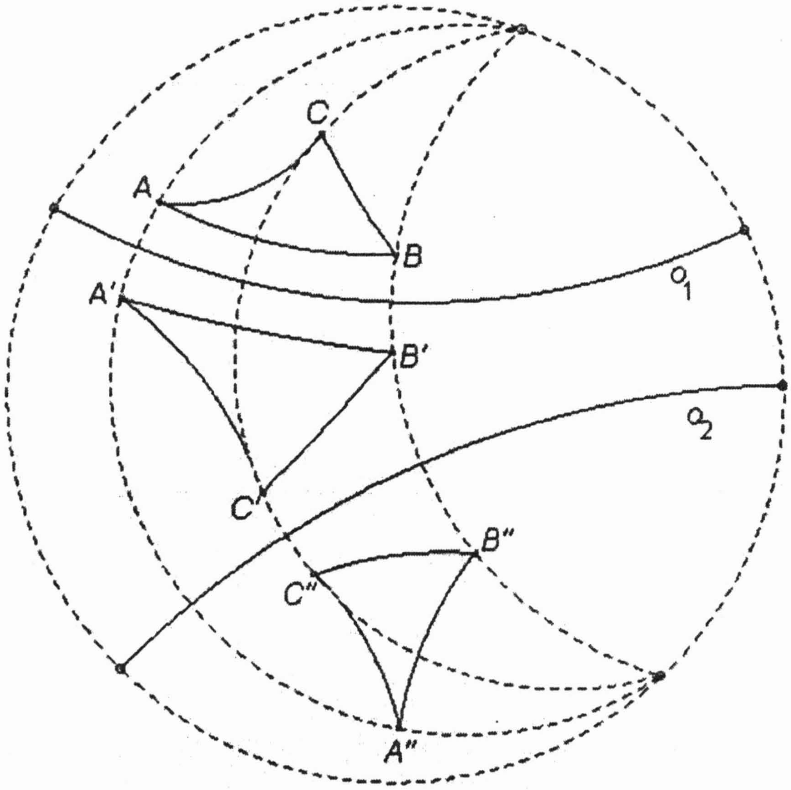


Obr. 8

[5] V tomto případě se cykl zobrazí jako eukleidovská kružnice.

7.2 Skládání osových souměrností s osami jako rozběžkami

Jde o podobný případ jako předchozí, opět získáváme shodné zobrazení – ponecháme na čtenáři, jak takové zobrazení nazvat. Z obr. 9 je ještě patrné, že křivky určené vzory a obrazy (zde jsou to části cyklů) se opět sbíhají v nevlastních bodech („v nekonečnu"). Tyto cykly jsou určené svazkem příslušných P-os, tj. rozběžek.



Obr. 9

8. Závěr

V předchozích kapitolách jsme ukázali, jak lze model Lobačevského roviny zajímavě využít k prezentaci tvrzení následující věty.

Věta 8.1: Shodná zobrazení v Lobačevského rovině tvoří grupu (tzv. *hyperbolickou grupu*) vzhledem k operaci skládání osových souměrností.

Snažili jsme se ukázat, že skládání osových souměrností ve dvou různých geometriích se v podstatě kryje v případě různoběžnosti os a cesty se rozcházejí, pokud se narazí na problém rovnoběžnosti. Stále však platí, že „shodné zobrazení zůstává shodným zobrazením".

Pro úplnost ještě přidejme jednu otázku. Kromě klasické eukleidovské a Lobačevského geometrie existuje ještě tzv. Riemannova geometrie, ve které neexistují nerůznoběžky, tzn. různé kolmice na danou přímku se vždy protínají. Jak je to s grupou shodností v tomto případě? Odpověď nechme na zvídavém čtenáři.

Miroslav Macháček
Magistrů 5/384
140 00 Praha 4 - Michle
e-mail: mmachac@centrum.cz