Učitel matematiky

Jiří Pecl

Úlohy analytické geometrie trojúhelníka

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 1, 43–55

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150639`

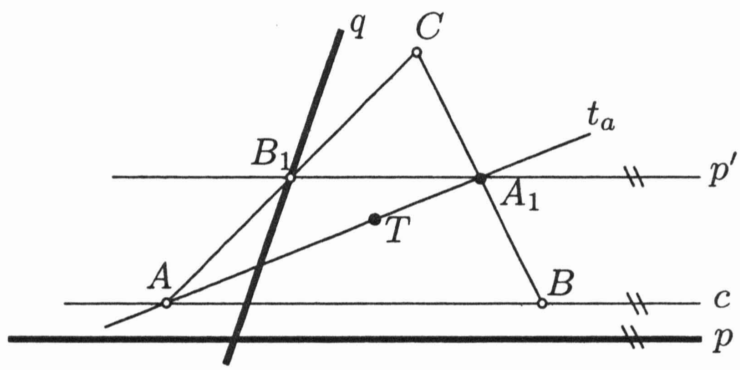
ÚLOHY ANALYTICKÉ GEOMETRIE TROJÚHELNÍKA

JIŘÍ PECL

V hodinách analytické geometrie se studenti středních škol učí řešit geometrické úlohy algebraickými metodami. K výuce tohoto tématu jsem sestavil anketní dotazník a rozeslal ho na gymnázia v celé ČR. Odpovědi mi poslali 103 učitelé matematiky. Podle nich je toto učivo pro žáky gymnázií středně obtížné. Nejpoužívanější učebnicí analytické geometrie je kniha [1] autorů M. Kočandrleho a L. Bočka (uvedlo ji 99 učitelů). Jako sbírka příkladů pak nejčastěji slouží publikace [2] I. Buška (používá ji 62 oslovených učitelů) a širší sbírka [3] J. Petákové (38 učitelů). Kromě těchto dvou uvedli učitelé v dotazníku ještě dalších 12 sbírek příkladů, které v hodinách analytické geometrie používají. Všechny uvedené sbírky obsahují jistě vhodné příklady k procvičení tohoto učiva, často by však mohly mít atraktivnější formu zadání, především tím, že by měly těsnější vazbu na poznatky a pojmy, které studenti znají o trojúhelnících a čtyřúhelnících z hodin syntetické geometrie. Cílem tohoto příspěvku je nabídnout učitelům právě takové příklady. S podrobným řešením zde uvedu 5 příkladů o trojúhelnících, které jsem sestavil pro svou diplomovou práci [4] a dalších 28 neřešených úloh opatřených odpověďmi.

Nejprve uvedeme značení v trojúhelníku ABC, které v jednotlivých příkladech používám. Kromě obvyklého značení α, β, γ vnitřních úhlů budou A_1, B_1, C_1 značit po řadě středy stran BC, AC, AB, dále pak budou A_0, B_0, C_0 značit paty výšek spuštěných po řadě z vrcholů A, B, C. Méně obvyklé bude, že a, b, c, resp. t_a, t_b, t_c, resp. v_a, v_b, v_c budou značit nikoliv úsečky, ale přímky, na kterých leží příslušné strany, resp. těžnice, resp. výšky trojúhelníku ABC. Ke každému řešenému příkladu uvádím schématický obrázek, na kterém jsou tučně vyznačeny dané přímky a body v hledaném trojúhelníku.

Příklad 1: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice těžiště $T[1,3]$, středu $A_1[3,4]$ strany BC a víte-li, že strana AB je rovnoběžná s přímkou $p: x+4y=0$ a že střed B_1 strany AC leží na přímce q určené body $X[-5,1]$, $Y[-3,3]$.



Řešení: Těžiště dělí těžnici trojúhelníku v poměru $2:1$, přitom větší část těžnice leží při vrcholu. Proto

$$A = T + 2\overrightarrow{A_1T} = [1,3] + 2(-2,-1) = [-3,1].$$

Střed B_1 strany AC leží na přímce q, jejíž parametrická rovnice je $X = [-5,1] + t(1,1)$, $t \in \mathbb{R}$. Z vlastností středních příček trojúhelníku plyne $A_1B_1 \parallel AB$, proto $A_1B_1 \subset p' \parallel p$, kde p' je přímka jdoucí bodem A_1, takže má obecnou rovnici $p' : x + 4y + k = 0$. Po dosazení souřadnic bodu A_1 do rovnice vyjde $k = -19$. Bodu $B_1[-5+t, 1+t] \in p'$ odpovídá ten parametr t, který splňuje podmínku $(-5+t) + 4(1+t) - 19 = 0$, takže $t = 4$ a $B_1[-1,5]$.
Nyní již

$$B = T + 2\overrightarrow{B_1T} = [1,3] + 2(2,-2) = [5,-1].$$

Bod B_1 je střed úsečky AC, takže:

$$\left.\begin{aligned} x_{B_1} &= \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 2x_{B_1} - x_A = 1, \\ y_{B_1} &= \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 2y_{B_1} - y_A = 9. \end{aligned}\right\} \Rightarrow C[1,9]$$

□

Výsledek: $\boxed{A[-3,1],\ B[5,-1],\ C[1,9]}$

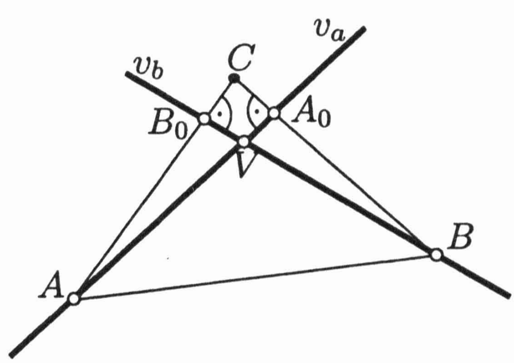
Jiné řešení: Souřadnice vrcholů A a B spočítáme stejně jako v předchozím řešení, avšak souřadnice vrcholu C můžeme vypočítat z obecně platných vzorců pro souřadnice těžiště trojúhelníku:

$$x_T = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$
$$y_T = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Odtud

$$\left.\begin{aligned} x_C &= 3x_T - x_A - x_B = 1 \\ y_C &= 3y_T - x_A - x_B = 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C[1,9]$$

Příklad 2: Vypočtěte souřadnice zbylých dvou vrcholů A, B trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholu $C[3,6]$, parametrickou rovnici přímky $v_a : X = [-2,0] + t(2,1),\ t \in \mathbb{R}$, a obecnou rovnici přímky $v_b : x + y - 5 = 0$.



Řešení: Vrchol $A[x_A, y_A]$ leží na přímce v_a, proto $x_A = -2 + 2t$, $y_A = t$ pro vhodné $t \in \mathbb{R}$. Navíc bod A leží na přímce b procházející vrcholem C kolmo k přímce v_b. Normálový vektor $(1,1)$ přímky v_b je směrový vektor přímky b, proto $x_A = 3+s$, $y_A = 6+s$

pro vhodné $s \in \mathbb{R}$. Celkem tedy:

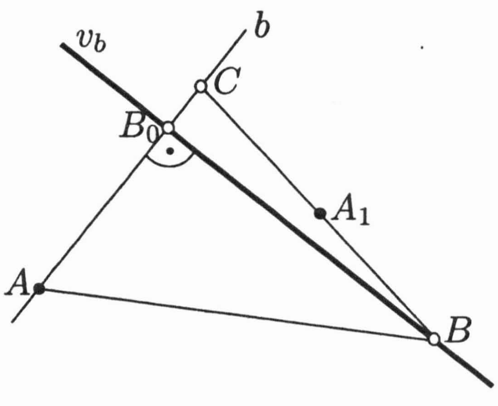
$$\begin{array}{lr} x_A: & -2+2t = 3+s \\ y_A: & t = 6+s \\ \hline & -2+2(6+s) = 3+s \\ & s = -7 \end{array} \quad \Rightarrow A[x_A, y_A] = [-4, -1]$$

Z $B \in v_b$ plyne $x_B + y_B - 5 = 0$, navíc bod B leží na přímce a procházející vrcholem C kolmo k přímce v_a. Normálový vektor přímky a je tedy $(2, 1)$, a protože $C \in a$, je $a: 2x + y - 12 = 0$. Souřadnice vrcholu B získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{array}{lr} v_b \cap a: & x_B + y_B - 5 = 0 \\ & 2x_B + y_B - 12 = 0 \\ \hline & x_B \qquad - 7 = 0 \\ & x_B = 7 \end{array} \quad \Rightarrow y_B = -2 \text{ a } B[7, -2]. \qquad \square$$

Výsledek: $\boxed{A[-4,-1],\ B[7,-2]}$

Příklad 3: Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[2, 7]$, střed $A_1[1, 3]$ strany BC a obecnou rovnici přímky $v_b: 3x - 2y + 11 = 0$.



Řešení: Protože $B \in v_b$, platí $3x_B - 2y_B + 11 = 0$, odkud $y_B = \dfrac{3x_B + 11}{2}$. Vrchol C leží na přímce b procházející vrcholem A kolmo k přímce v_b, takže její obecná rovnice je $b: 2x + 3y - 25 = 0$.

Souřadnice $[x_C, y_C]$ vrcholu C tedy splňují rovnost $2x_C + 3y_C - 25 = 0$, odkud $x_C = \dfrac{25 - 3y_C}{2}$. Bod A_1 je střed úsečky BC a platí tedy:

$$x_{A_1} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{x_B + \frac{25-3y_C}{2}}{2}, \quad y_{A_1} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{\frac{3x_B+11}{2} + y_C}{2}$$

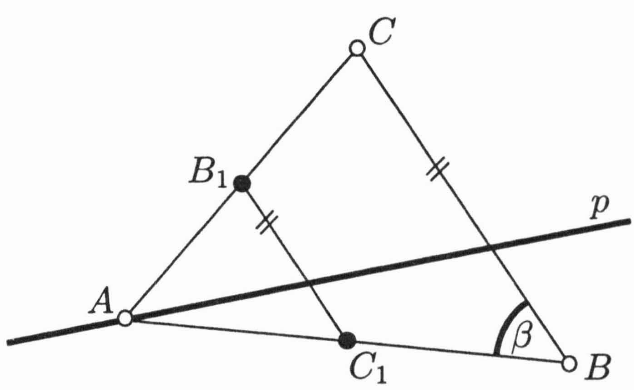
Po úpravě a dosazení dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_B - 3y_C + 21 &= 0 \\ 3x_B + 2y_C - \ \ 1 &= 0 \\ \hline 13x_B \qquad + 39 &= 0 \\ x_B = -3 \quad &\Rightarrow y_C = 5 \end{aligned}$$

Je tedy $y_B = \dfrac{3x_B + 11}{2} = 1$, resp. $x_C = \dfrac{25 - 3y_C}{2} = 5$. □

Výsledek: $\boxed{B[-3, 1],\ C[5, 5]}$

Příklad 4: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice středů stran $B_1[0, 3]$ a $C_1[1, 0]$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$ ($\beta \doteq 53°07'$) a víte-li, že $A \in p : x - y + 3 = 0$.



Řešení: Protože $A[x_A, y_A] \in p$, platí $x_A - y_A + 3 = 0$, odkud $x_A = y_A - 3$.
Víme, že $B_1C_1 \parallel CB$, a že tedy $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle B_1C_1A| = \beta$. Pak

ovšem:

$$\frac{\overrightarrow{C_1B_1} \cdot \overrightarrow{C_1A}}{\left|\overrightarrow{C_1B_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{C_1A}\right|} = \cos\beta$$

$$\frac{(-1,3)\cdot(x_A-1,y_A)}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{(x_A-1)^2+y_A^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{(-1,3)\cdot(y_A-4,y_A)}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{(y_A-4)^2+y_A^2}} = \frac{3}{5}$$

$$5\cdot(2y_A+4) = 3\sqrt{10}\cdot\sqrt{(y_A-4)^2+y_A^2}$$

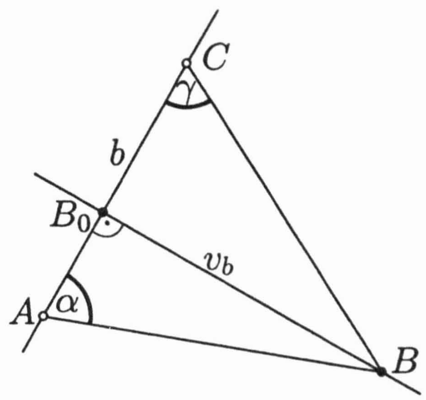
Nyní použijeme důsledkovou úpravu – obě strany rovnice umocníme. Po dalších úpravách dostaneme kvadratickou rovnici

$$y_A^2 - 14y_A + 13 = 0,$$

ze které plyne $y_A = 1$ (pak $x_A = -2$) nebo $y_A = 13$ (pak $x_A = 10$). Dosazením se přesvědčíme, že vobou případech skutečně platí $\cos\beta = \frac{3}{5}$. Vyhovují tedy dva vrcholy $A[-2,1]$ a $A'[10,13]$.
Protože C_1 je střed úsečky AB, dále platí:
$B = A + 2\overrightarrow{AC_1} = [-2,1] + 2(3,-1) = [4,-1]$, resp.
$B' = A' + 2\overrightarrow{A'C_1} = [10,13] + 2(-9,-13) = [-8,-13]$.
Protože bod B_1 je střed úsečky AC, podobně platí:
$C = A + 2\overrightarrow{AB_1} = [-2,1] + 2(2,2) = [2,5]$, resp.
$C' = A' + 2\overrightarrow{A'B_1} = [10,13] + 2(-10,-10) = [-10,-7]$. □

Výsledek: $A[-2,1]$, $B[4,-1]$, $C[2,5]$, resp.
$A'[10,13]$, $B'[-8,-13]$, $C'[-10,-7]$

Příklad 5: Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů A, C trojúhelníku ABC, jestliže jsou dány souřadnice vrcholu $B[8,1]$ a paty výšky $B_0[2,4]$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ ($\alpha \doteq 56°19'$) a úhel $\gamma = 45°$.
Řešení: Body B, B_0 leží na přímce v_b, $\overrightarrow{BB_0} = (-6,3) \parallel (2,-1)$ je proto její směrový vektor. Hledané vrcholy A, C leží na přímce b, která prochází bodem $B_0[2,4]$ kolmo k přímce v_b, takže její obecná



rovnice je $b: 2x - y = 0$. Platí tedy $2x_A - y_A = 0$, odkud $y_A = 2x_A$, resp. $2x_C - y_C = 0$, odkud $y_C = 2x_C$.
Podle zadání $\alpha < 90°$, platí tedy $|\sphericalangle BAB_0| = \alpha$:

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB_0}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB_0}\right|} = \cos\alpha$$

$$\frac{(8 - x_A, 1 - 2x_A) \cdot (2 - x_A, 4 - 2x_A)}{\sqrt{(8 - x_A)^2 + (1 - 2x_A)^2} \cdot \sqrt{(2 - x_A)^2 + (4 - 2x_A)^2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Tuto rovnici řešíme obdobně jako v příkladu 4 postupem zahrnujícím umocnění. Dostaneme kvadratickou rovnici s kořeny $x_A = 0$ a $x_A = 4$. Pro $x_A = 0$ je $y_A = 0$, takže je $A[0,0]$, resp. pro $x_A = 4$ je $y_A = 8$ a je tedy $A'[4,8]$.
Protože je $\gamma < 90°$, platí $|\sphericalangle BCB_0| = \gamma$, takže:

$$\frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB_0}}{\left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB_0}\right|} = \cos\gamma$$

$$\frac{(8 - x_C, 1 - 2x_C) \cdot (2 - x_C, 4 - 2x_C)}{\sqrt{(8 - x_C)^2 + (1 - 2x_C)^2} \cdot \sqrt{(2 - x_C)^2 + (4 - 2x_C)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vdots$$

$$(x_C - 5)(x_C + 1) = 0$$

Pro $x_C = 5$ je $y_C = 10$, proto $C[5,10]$, resp. pro $x_C = -1$ je $y_C = -2$ a $C'[-1,-2]$.

Na první pohled se zdá, že řešeními jsou trojúhelníky ABC, ABC', $A'BC$ a $A'BC'$. Protože však $\alpha < 90°$ a $\gamma < 90°$, je pata výšky B_0 spuštěná z vrcholu B vnitřní bod úsečky AC. Je-li tedy $A[0,0]$, je B_0 vnitřní bod úsečky AC pouze pro $C[5,10]$, resp. je-li $A[4,8]$, je B_0 vnitřní bod úsečky AC pouze pro $C[-1,-2]$. □

Výsledek: $\boxed{A[0,0],\ C[5,10],\ \text{resp. } A'[4,8],\ C'[-1,-2]}$

Bez postupu řešení uvádíme ještě některé další příklady.

A. NEJMÉNĚ NÁROČNÉ ÚLOHY

Příklad 1: Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholu $A[-7,-5]$ a pat výšek $A_0\left[\frac{7}{5},\frac{11}{5}\right]$ a $B_0\left[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]$.

Výsledek: $\boxed{B[5,-2],\ C[-1,5]}$

Příklad 2: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice středů stran $A_1[4,1]$, $B_1[-1,2]$, $C_1[1,-4]$.

Výsledek: $\boxed{A[-4,-3],\ B[6,-5],\ C[2,7]}$

Příklad 3: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, znáte-li obecné rovnice přímek $a: 2x+y-10=0$, $t_b: x+2y-2=0$ a $t_c: x-y+1=0$.

Výsledek: $\boxed{A[-9,1],\ B[6,-2],\ C[3,4]}$

Příklad 4: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, znáte-li obecné rovnice přímek $a: 2x+y-8=0$, $t_a: x-3y+3=0$ a $t_b: 3x+5y-5=0$.

Výsledek: $\boxed{A[-6,-1],\ B[5,-2],\ C[1,6]}$

Příklad 5: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice průsečíku výšek $V\left[\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right]$ a pat výšek $A_0[6,1]$, $B_0[2,3]$.

Výsledek: $\boxed{A[-3,-2],\ B[7,-2],\ C\left[\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right]}$

Příklad 6: Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice vrcholu $A[-2, 0]$ a obecné rovnice přímek $a : x + y - 7 = 0$, $v_b : x + 2y - 8 = 0$.
Výsledek: $\boxed{B[6, 1],\ C[1, 6]}$

Příklad 7: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecné rovnice přímek $c : y+2 = 0$, $v_a : x-3y-3 = 0$ a $v_b : x + y - 5 = 0$.
Výsledek: $\boxed{A[-3, -2],\ B[7, -2],\ C\left[\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right]}$

Příklad 8: Vypočítejte souřadnice zbylého vrcholu C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholů $A[-3, 0]$, $B[7, -5]$ a průsečíku výšek $V[0, 2]$.
Výsledek: $\boxed{C[1, 4]}$

Příklad 9: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecnou rovnici přímky $c : x + 2y = 0$ a souřadnice bodů $V[2, 3]$ a $B_0[0, 6]$.
Výsledek: $\boxed{A\left[-\frac{36}{7}, \frac{18}{7}\right],\ B[6, -3],\ C\left[\frac{19}{2}, \frac{21}{4}\right]}$

Příklad 10: Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů A, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholu $B\left[\frac{5}{2}, 0\right]$ a obecné rovnice přímek $v_a : x - 2y = 0$ a $t_a : 6x - 7y + 5 = 0$.
Výsledek: $\boxed{A[-2, -1],\ C\left[\frac{1}{2}, 4\right]}$

B. STŘEDNĚ OBTÍŽNÉ ÚLOHY

Příklad 1: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecnou rovnici přímky $c : x - 8y + 2 = 0$ a souřadnice pat výšek $A_0\left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$, $B_0[0, 4]$.
Výsledek: $\boxed{\begin{array}{l} A[-2, 0],\ B[6, 1],\ C[1, 6], \text{ resp.} \\ A'[6, 1],\ B'[-2, 0],\ C'\left[\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right] \end{array}}$

Příklad 2: Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholu $A[-5,-2]$ a obecné rovnice přímek $t_b : 2x + y - 4 = 0$, $t_c : 2x - y = 0$.

Výsledek: $\boxed{B[3,-2],\ C[5,10]}$

Příklad 3: Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholu $A[-3,3]$, průsečíku výšek $V[3,3]$ a těžiště $T[5,5]$.

Výsledek: $\boxed{B[9,15],\ C[9,-3],\text{ resp. } B'[9,-3],\ C'[9,15]}$

Příklad 4: Vypočítejte souřadnice vrcholů rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou BC, znáte-li souřadnice těžiště $T[3,4]$, středu $A_1[5,5]$ strany BC a víte-li, že $t_b \parallel p : x + 3y = 0$.

Výsledek: $\boxed{A[-1,2],\ B[6,3],\ C[4,7]}$

Příklad 5: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice bodu $B_1[1,6]$ a obecné rovnice přímek $t_a : 4x - 7y + 8 = 0$, $t_c : 8x + y - 44 = 0$.

Výsledek: $\boxed{A[-2,0],\ B[13,0],\ C[4,12]}$

Příklad 6: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice těžiště $T[-2,0]$, obecnou rovnici přímky $a : 4x + 3y - 12 = 0$ a víte-li, že $A_1 \in p : y - 2 = 0$, $|BB_1| = 6\sqrt{5}$ a $x_B > x_{A_1}$.

Výsledek: $\boxed{A[-9,-4],\ B[6,-4],\ C[-3,8]}$

Příklad 7: Vypočítejte souřadnice vrcholu C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholů $A[0,0]$, $B[5,0]$, úhel $\alpha = 45°$ a víte-li, že $C \in p : x - 3y + 4 = 0$.

Výsledek: $\boxed{C[2,2]}$

Příklad 8: Vypočítejte souřadnice vrcholu C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholů $A[0,0]$, $B[3,0]$, úhel $\alpha = 60°$ a velikost výšky $|CC_0| = 3\sqrt{3}$.

Výsledek: $\boxed{C\left[3, 3\sqrt{3}\right],\text{ resp. } C'\left[3, -3\sqrt{3}\right]}$

Příklad 9: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecné rovnice přímek $b: x - y + 5 = 0$, $c: x + 2y + 2 = 0$ a velikosti výšek $|BB_0| = 6\sqrt{2}$, $|CC_0| = 3\sqrt{5}$. Ze všech možných řešení vyberte to, pro které jsou vzdálenosti vrcholů od počátku souřadné soustavy nejmenší.

Výsledek: $\boxed{A[-4,1],\ B[4,-3],\ C[1,6]}$

Příklad 10: Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C rovnostranného trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholu $A[-4,0]$ a středu $O\left[0, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$ kružnice trojúhelníku opsané.

Výsledek: $\boxed{B[4,0],\ C\left[0,4\sqrt{3}\right], \text{ resp. } B'\left[0,4\sqrt{3}\right],\ C'[4,0]}$

C. NÁROČNÉ ÚLOHY

Příklad 1: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecnou rovnici přímky $a: 3x + y - 17 = 0$, souřadnice paty výšky $B_0[0,5]$, víte-li, že $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ($\alpha \doteq 71°34'$), $\cos\gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ($\gamma \doteq 63°26'$) a že $y_C \geq y_{B_0}$.

Výsledek: $\boxed{A[2,7],\ B[6,-1],\ C[3,8]}$

Příklad 2: V trojúhelníku ABC jsou dány souřadnice vrcholů $B[6,1]$, $C[1,6]$ a velikost vnitřního úhlu $\alpha = 45°$. Vypočítejte souřadnice zbylého vrcholu A, víte-li, že $A \in p: 3x - y + 3 = 0$. Ze všech řešení vyberte to, pro které je vzdálenost počátku O_{xy} od přímky c minimální.

Výsledek: $\boxed{A[-2,-3]}$

Příklad 3: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice těžiště $T[-2,3]$, středu $B_1[-5,5]$ strany AC a víte-li, že $c \parallel p: 2x - 23y = 0$ a $|AA_1| = \frac{3}{4}|AC|$.

Výsledek: $\boxed{A\left[-\frac{15}{2},-2\right],\ B[4,-1],\ C\left[-\frac{5}{2},12\right]}$

Příklad 4: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice těžiště $T[1,2]$, středu $B_1[-1,3]$ strany AC, velikosti stran $|BC| = 4\sqrt{5}$, $|AB| = 2\sqrt{17}$ a víte-li, že $y_A \leq y_C$.

Výsledek: $\boxed{A[-3,-2],\ B[5,0],\ C[1,8]}$

Příklad 5: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice středů stran $A_1[7,6]$, $B_1[-2,3]$ a středu kružnice opsané $O[2,1]$.

Výsledek: $\boxed{A[-6,-5],\ B[12,1],\ C[2,11]}$

Příklad 6: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, znáte-li obecné rovnice přímek $t_a : x-y-2=0$, $t_b : x+2y+1=0$ a víte-li, že $t_c \parallel p : x+1=0$, a že přímka p protne přímku c v bodě $P\left[?,-\frac{9}{2}\right]$.

Výsledek: $\boxed{A[-3,-5],\ B[5,-3],\ C[1,5]}$

Příklad 7: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice těžiště $T[1,-1]$, průsečíku výšek $V[-1,-$ $-3]$ a obecnou rovnici přímky $a : x-2y+3=0$.

Výsledek: $\boxed{\begin{array}{l} A[1,-7],\ B[-5,-1],\ C[7,5],\ \text{resp.} \\ A[1,-7],\ B'[7,5],\ C'[-5,-1] \end{array}}$

Příklad 8: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice těžiště $T[1,3]$, obecné rovnice přímek $v_b : x+2y-3=0$, $p : x-y+6=0$ a $q : x+4y-9=0$ a víte-li, že $B_1 \in p$ a že $c \parallel q$.

Výsledek: $\boxed{A[-3,1],\ B[5,-1],\ C[1,9]}$

Literatura

[1] Kočandrle M., Boček L., *Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie*, Prometheus, Praha, 2002.

[2] Bušek I., *Sbírka úloh pro gymnázia – Analytická geometrie*, Prometheus, Praha, 2002.

[3] Petáková J., *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Prometheus, Praha, 2003.

[4] Pecl J., *Určování trojúheníků analytickými výpočty*, diplomová práce, PřF MU v Brně, 2005.

Mgr. Jiří Pecl
doktorand Ústavu matematiky a statistiky PřF MU
Janáčkovo nám. 2a
602 00 Brno
e-mail: pecl@mail.muni.cz