Jiří Haviger

Racionální čísla z pohledu číselných soustav

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 1, 18–31

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150637`

RACIONÁLNÍ ČÍSLA Z POHLEDU ČÍSELNÝCH SOUSTAV

JIŘÍ HAVIGER

Úvod

Co je to číslo? Tuto otázku jistě každý slyšel a každý se s odpovědí na ni musel vyrovnat. Otázku *Proč je číslo* 17,5 *zapsané právě v tomto tvaru?* vám asi položí pouze zvídavější studenti; o to zajímavější je odpověď na ni. Pokusíme se na ni odpovědět a taktéž na několik dalších. Které to budou?

1. Proč je číslo 1 705 zapsané právě tak jak je známe?
2. Lze je zapsat „jinak“?
3. Lze (a pokud ano jak) s „jinak zapsaným číslem“ počítat?
4. A co čísla 17,05; $11{,}\overline{31}$ nebo π?
5. A jak je to vlastně s periodickým rozvojem čísla $\frac{1}{3}$?

Na tyto otázky se pokusíme odpovědět v následujícím článku.

Předpokládané znalosti: sčítání, odčítání, násobení a dělení v oboru reálných čísel (v desítkové soustavě), používání symbolu „...“, celé mocniny a používání indexů. Rovnosti se symbolem $\sum$ lze bez problémů vynechat. Skromně probranou teorii budeme o to více demonstrovat příklady, které jsou v pedagogické praxi použitelné.

Desítková soustava

Co rozumíme zápisem $a = 457$? Tu skutečnost, že číslo a obsahuje čtyři krát sto plus pět krát deset plus sedm jednotek. Matematicky zapsáno $a = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$ neboli

$$a = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

Jedná se tedy o číslo a zapsané pomocí mocnin 10 a cifer 4, 5, 7.

Obecné vyjádření: mějme $z \in \mathbb{N}$ a množinu $C_z = \{0, 1, \ldots, z-1\}$. Pokud pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $a_i \in C_z$, pak obecný zápis každého přirozeného čísla $a \in \mathbb{N}$ má tvar:

$$a = \cdots + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z^1 + a_0 \cdot z^0, \quad \text{neboli} \tag{9}$$

$$a = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \cdot z^i, \tag{10}$$

kde od jistého i jsou všechna a_i rovna nule. Číslo z (v našem případě $z = 10$) nazýváme **základ číselné soustavy** a danou soustavu nazýváme z-**soustava** (desítková soustava). Číslo a vyjádřené v z-soustavě označujeme $(a)_z$. Vzhledem k tomu, že desítková soustava je pro nás „přirozená“, platí úmluva, že číslo bez udání soustavy je vyjádřeno v soustavě desítkové (a toho se budeme držet i v tomto článku). Taktéž operace sčítání, násobení a umocňování budeme chápat v desítkové soustavě, pokud výslovně neuvedeme změnu.

Jiné číselné soustavy

Co je typické pro zápis čísla $a = 457$ v desítkové soustavě? Jediná podmínka: $z = 10$. Pokusme se tuto podmínku změnit. Vezměme $z = 4$ a pokusme se vyjádřit číslo 457 ve tvaru

$$457 = \cdots + b_2 \cdot 4^2 + b_1 \cdot 4 + b_0.$$

Upravme:

$$457 = 4 \cdot (4 \cdot (\cdots + b_2) + b_1) + b_0,$$

tedy b_0 je zbytek po dělení: $457 : 4 = c_0 + \frac{b_0}{4}$, kde $c_0 = b_1 + {}$ $+ 4 \cdot (b_2 + \ldots)$. Pokud provedeme dělení $c_0 : 4$, zbytek bude b_1 atd.

Protože všechna b_i jsou zbytky po dělení 4, patří jistě do množiny C_4. Celý postup ukáže následující příklad.

Příklad 1
zadání: převeďte číslo 457 do čtyřkové soustavy!
řešení:
$457 : 4 = 114$ zbytek $b_0 = 1$
$114 : 4 = 28$ zbytek $b_1 = 2$
$28 : 4 = 7$ zbytek $b_2 = 0$
$7 : 4 = 1$ zbytek $b_3 = 3$
$1 : 4 = 0$ zbytek $b_4 = 1$
$\rightarrow 457 = 1 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1$
výsledek: $457 = (457)_{10} = (13021)_4$.

Tohoto postupu lze bez problémů použít pro $z \in \{2, 3, \dots, 10\}$. Soustavy se základem vyšším než 10 mají háček v tom, že zbytky po dělení např. 14 mohou být nejen $0, \dots, 9$ (tedy jednociferné) ale i $10, 11, 12, 13$, což jsou čísla, která budeme těžko chápat jako cifry. Proto se pro naše potřeby označují písmeny $A(= 11)$, $B(= 12)$, C, D, ... Předchozí postup lze s tímto značením použít beze změn:

Příklad 2
zadání: vyjádřete číslo 286 ve dvanáctkové soustavě!
řešení:
$286 : 12 = 23$ zbytek $b_0 = 10 = (A)_{12}$
$23 : 12 = 1$ zbytek $b_1 = 11 = (B)_{12}$
$1 : 12 = 0$ zbytek $b_2 = 1 = (1)_{12}$.
$\rightarrow 286 = 1 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12 + 10 = (1)_{12} \cdot 12^2 + (B)_{12} \cdot 12 + (A)_{12}$
výsledek: $286 = (286)_{10} = (1BA)_{12}$.

Korektnost předchozích příkladů je zřejmá po úpravě vztahu (9) do tvaru

$$a = z(z(\cdots + a_2) + a_1) + a_0.$$

A jak funguje převod opačný $(a)_z \rightarrow (a)_{10}$? To je zřejmé z vyjádření čísla v číselné soustavě:

Příklad 3

zadání: vyjádřete číslo $(452)_6$ v desítkové soustavě!

řešení:

$(452)_6 = 4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0 = 4 \cdot 36 + 5 \cdot 6 + 2 = 176 = (176)_{10}$

výsledek: $(452)_6 = (176)_{10} = 176.$

Vyjádření několika čísel v různých soustavách ukáže následující tabulka. Všiměte si, pro která $(a)_{10}$ přechází $(a)_2$, $(a)_3$, ... od jednociferného ke dvoucifernému vyjádření. Taktéž se zamyslete nad tím, co je vlastně *číslo* a nakolik je či není tento pojem svázán s vyjádřením v číselné soustavě.

Tabulka 1

$(a)_{10}$	$(a)_2$	$(a)_3$	$(a)_6$	$(a)_{13}$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	10	3	3
4	100	11	4	4
5	101	12	5	5
6	110	20	10	6
7	111	21	11	7
8	1000	22	12	8
9	1001	100	13	9
10	1010	101	14	A
11	1011	102	15	B
12	1100	110	20	C
13	1101	111	21	10
483	111100011	122220	2123	2B2

Číslo je abstraktní entita nezávislá na způsobu svého vyjádření.

Operace v číselných soustavách

V této kapitole se budeme snažit rozebrat postupy sčítání a násobení, abychom je mohli aplikovat v jiných číselných soustavách. Pochopitelně lze čísla převést do desítkové soustavy, tam je sečíst či vynásobit a výsledek převést zpět. Tento postup však lze doporučit spíše při případném počítání, k pochopení stylu práce s číselnými soustavami je výhodnější sčítání či násobení přímo v z-soustavě. Taktéž bude zřejmé, jak některé běžné postupy (např. násobení dvou čísel) mohou mít kroky obtížné na pochopení.

Sčítat dvě čísla se učí děti na základní škole následovně: mějme čísla 345 a 28. Sečteme $8 + 5 = 13$, napíšeme 3 a jedničku si pamatujeme. V druhém kroku sečteme $2 + 4 = 6$, přičteme 1 a zapíšeme 7. Nakonec zapíšeme poslední 3, takže výsledek je na světě: 373. Takto se sčítají dvě přirozená čísla zapsaná v desítkové soustavě. Postup v jiných soustavách bude analogický.

Příklad 4
zadání: sečtěte $(132)_4 + (12)_4$!
řešení:
$2 + 2 = 4 = (10)_4$, protože $4 : 4 = 1$ zbytek 0
$3 + 1 + 1 = 5 = (11)_4$, protože $5 : 4 = 1$ zbytek 1
$1 + 0 + 1 = 2 = (2)_4$, protože $2 : 4 = 0$ zbytek 2.
výsledek: $(132)_4 + (12)_4 = (210)_4$.

Obraťme nyní pozornost k násobení. Násobit dvě čísla se učí děti na základní škole následovně: mějme čísla 345 a 28. Vynásobíme $8 \cdot 5 = 40$, zapíšeme 0 a pamatujeme si 4. Vynásobíme $8 \cdot 4 = 32$, přičteme 4, zapíšeme 6 a pamatujeme si 3. Vynásobíme $8 \cdot 3 = 24$, přičteme 3 a výsledek zapíšeme. Provedeme totéž pro 2 a výsledek „posuneme o řád“.

Příklad 5
zadání: vynásobte $(10032)_4 \cdot (3)_4$!
řešení:
$2 \cdot 3 + 0 = 6 = (12)_4$, protože $6 : 4 = 1$ zbytek 2
$3 \cdot 3 + 1 = 10 = (22)_4$, protože $10 : 4 = 2$ zbytek 2
$0 \cdot 3 + 2 = 2 = (2)_4$, protože $2 : 4 = 0$ zbytek 2
$0 \cdot 3 + 0 = 0 = (0)_4$, protože $0 : 4 = 0$ zbytek 0
$1 \cdot 3 + 0 = (3)_4$, protože $3 : 4 = 0$ zbytek 3.
výsledek: $(10032)_4 \cdot (3)_4 = (30222)_4$.

Příklad 6
zadání: vynásobte $(132)_4 \cdot (32)_4$!

řešení:
$(132 \cdot 2)_4 = (330)_4$- násobení ve čtyřkové soustavě
$(132 \cdot 3)_4 \cdot 4 = (1122 \cdot 10)_4 = (11220)_4$
$(330 + 11220)_4 = (12210)_4$ – sčítání ve čtyřkové soustavě.
výsledek: $(132)_4 \cdot (32)_4 = (12210)_4$.

Poznámka na závěr kapitoly. V popsaných algoritmech záměrně používáme základní výpočty v desítkové soustavě a na příslušnou soustavu se převádí pomocí dělení se zbytkem. Výpočty lze provádět i přímo v příslušné soustavě, ale to není náplní tohoto článku. Bylo by k tomu potřeba naučit se počítat přímo např. $(7 + 6 = 15)_8$, nebo $(3 \cdot 5 = 17)_8$, což by zabralo další stránku či dvě. Naším hlavním tématem jsou ovšem čísla racionální.

Celá a racionální a reálná čísla v číselných soustavách

Celá, resp. racionální čísla se zavádějí pro uzavření algebraických struktur, tedy pro abelovské grupy $(\mathbb{Z}, +)$ a $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$. Pro jistotu připomenu, že abelovská grupa musí být uzavřená, asociativní, s neutrálním prvkem a s inverzním prvkem pro každý svůj prvek.

Pro sčítání značíme neutrální prvek 0 a inverzní (opačný) $-a$. Rozšíření přirozených čísel o nulu a záporná čísla probíhá i v případě jiných číselných soustav podobně desítkové, proto i v našem případě lze označit (ve stejné z-soustavě): $-a = -(a)_z = (-a)z$. Prakticky tedy převod mezi soustavami provádíme bez znaménka, které přidáme nakonec.

Příklad 7
zadání: vyjádřete číslo -12 v pětkové soustavě!
řešení:
$-12 = (-12)_{10} = -(1 \cdot 10 + 2) = -(2 \cdot 5 + 2) = -(22)_5 = (-22)_5$.
výsledek: $-12 = (-22)_5$.

Pro násobení značíme neutrální prvek $1 = (1)_{10} = (1)_z$ a (převrácený) a^{-1}. Podívejme se nyní na vyjádření čísla převráceného.

Jednou z možností je vyjádřit číslo a^{-1} pomocí zlomku, tj. $\frac{1}{a}$, druhou pomocí desetinného čísla. Tvar zlomku nebude činit problémy ani v jiných soustavách. Pokud označíme a^{-1} jako $\frac{1}{a}$, $p \cdot q^{-1}$ jako $\frac{p}{q}$ a $p^{-1} \cdot q^{-1}$ jako $\frac{1}{pq}$, můžeme převést následující zlomek:

Příklad 8

zadání: vyjádřete $\frac{7}{10}$ v pětkové soustavě!

řešení: $\left(\frac{7}{10}\right)_{10} = \frac{(7)_{10}}{(10)_{10}} = \frac{(12)_5}{(20)_5} = \left(\frac{12}{20}\right)_5$

výsledek: $\frac{7}{10} = \left(\frac{12}{20}\right)_5$.

Poznámka k soudělnosti dvou čísel. Dvě celá čísla a, b jsou soudělná právě tehdy, když existují celá čísla k, p, q taková, že platí $a = k \cdot p$, $b = k \cdot q$. Protože násobení nezávisí na číselné soustavě, je (ne)soudělnost také nezávislá. Takže pokud nejsou čísla 7 a 10 soudělná při vyjádření v desítkové soustavě, pak nemohou být soudělná ani když je vyjádříme jako $(12)_5$ a $(20)_5$.

Pojem (ne)soudělnost je vlastností čísel a ne pouze jejich vyjádření.

Příklad 9

zadání: vyjádřete $\frac{7}{4}$ desetinným číslem!

řešení:

$7 : 4 = 1$ zbytek 3

$(3 \cdot 10) : 4 = 7$ zbytek 2

$(2 \cdot 10) : 4 = 5$ zbytek 0.

výsledek: $\frac{7}{4} = 1{,}75$.

Číslo $a = \frac{7}{4}$ tedy běžně zapisujeme ve tvaru $a = 1{,}75$. Co znamená tento tvar? Že číslo a obsahuje jednu celou, sedm desetin a 5 setin, což je matematicky zapsáno tvarem

$$a = 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}.$$

Příklad 10

zadání: vyjádřete $\frac{7}{9}$ desetinným číslem!

řešení:

$7 : 9 = 0$ zbytek 7

$(7 \cdot 10) : 9 = 7$ zbytek 7

$(7 \cdot 10) : 9 = 7$ zbytek 7

...

výsledek: $\frac{7}{9} = 1{,}777\cdots = 1{,}\overline{7}$

Obecně každé racionální číslo a v soustavě o základu $z \in \mathbb{N}$ lze zapsat následovně:

$$a = \pm(a1 + a2), \text{ kde}$$

$$a_1 = \cdots + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z^1 + a_0 \cdot z^0$$
$$a_2 = a_{-1} \cdot z^{-1} + a_{-2} \cdot z^{-2} + \ldots$$

Číslo a_1 nazýváme **celá část čísla** a, část a_2 nazýváme **desetinná část čísla** a (upozorňujeme, že pro záporná čísla nesouhlasí s definicí *funkcí* celá část z x, a desetinná část z x). Protože celou částí jsem se již zabývali, budeme se věnovat pouze číslům s nulovou celou a nenulovou desetinnou částí.

$$a = a_{-1} \cdot z^{-1} + a_{-2} \cdot z^{-2} + \ldots$$
$$a = z^{-1} \cdot (a_{-1} + z^{-1} \cdot (a_{-2} \ldots)) \qquad | \cdot z$$
$$a \cdot z = a_{-1} + z^{-1} \cdot (a_{-2} \ldots) \qquad | - a_{-1}, \ \cdot z$$

což je číslo, které má celou část a_{-1} a desetinnou $z^{-1} \cdot (a_{-2} \ldots)$. Odečteme tuto celou část, výsledek opět vynásobíme z:

$$(a \cdot z - a_{-1}) \cdot z = a_{-2} + z^{-1} \cdot (a_{-3} \ldots)$$

což je číslo, jehož celá část je a_{-2} a postup můžeme opakovat.

Příklad 11

zadání: vyjádřete 0,104 desetinným číslem v pětkové soustavě!

řešení:

$0{,}104 \cdot 5 = 0{,}52$, celá část je 0, desetinná je 0,52

$0{,}52 \cdot 5 = 2{,}6$, celá část je 2, desetinná je 0,6

$0{,}6 \cdot 5 = 3$, celá část je 3, desetinná je 0.

výsledek: $0{,}104 = (0{,}023)_5$

Příklad 12

zadání: vyjádřete 0,51 desetinným číslem v pětkové soustavě!

řešení:

0

$51 \cdot 5 = 2$

55, celá část je 2, desetinná je 0,55

0

$55 \cdot 5 = 2{,}75$, celá část je 2, desetinná je 0,75

0

$75 \cdot 5 = 3{,}75$, celá část je 3, desetinná je 0,75

0

$75 \cdot 5 = 3{,}75$, celá část je 3, desetinná je 0,75

...

výsledek: $0{,}51 = (0{,}22\overline{3})_5$

Periodické a neperiodické vyjádření

Nejprve si připomeňme, jakým způsobem lze desetinnému tvaru přiřadit zlomek. Pro neperiodická vyjádření použijeme známou konstrukci:

Příklad 13

zadání: vyjádřete 2,125 zlomkem!

řešení:

$$2{,}125 = 2 + \frac{125}{1\,000} = \frac{2\,125}{1\,000}$$

výsledek: $2{,}125 = \dfrac{2\,125}{1\,000}$ v nezkráceném tvaru.

Pro čísla vyjádřená periodickým rozvojem využijeme následující tabulku (jejíž pravdivost lze snadno ověřit dělením):

Tabulka 2

$\frac{1}{9} = 0{,}\overline{1}$	$\frac{1}{90} = 0{,}0\overline{1}$	$\frac{1}{900} = 0{,}00\overline{1}$	...
$\frac{1}{99} = 0{,}\overline{01}$	$\frac{1}{990} = 0{,}0\overline{01}$	$\frac{1}{9\,900} = 0{,}00\overline{01}$	...
$\frac{1}{999} = 0{,}\overline{001}$	$\frac{1}{9\,990} = 0{,}0\overline{001}$	$\frac{1}{99\,900} = 0{,}00\overline{001}$	...
...	...	...	...

Příklad 14

zadání: vyjádřete $0{,}0\overline{51}$ zlomkem!

řešení: $0{,}0\overline{51} = 51 \cdot 0{,}0\overline{01} = \frac{51}{990}$.

výsledek: $0{,}0\overline{51} = \frac{51}{990}$ v nezkráceném tvaru.

Příklad 15

zadání: vyjádřete $0{,}12\overline{35}$ zlomkem!

řešení: $0{,}12\overline{35} = 0{,}12 + 0{,}00\overline{35} = \frac{12}{100} + \frac{35}{9\,900} = \frac{12 \cdot 99 + 35}{9\,900}$

výsledek: $0{,}12\overline{35} = \frac{1\,223}{9\,900}$.

Umíme tedy dvě základní operace:

- převést desetinné číslo na zlomek a naopak
- převést desetinné číslo do jiné soustavy

Pokusme se tedy o následující příklady.

Příklad 16

zadání: Vyjádřete $(0{,}1)_2$ v desítkové soustavě!

řešení: $(0{,}1)_2 = 1 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}$

výsledek: $(0{,}1)_2 = 0{,}5$

Příklad 17

zadání: Vyjádřete $(0{,}2)_9$ v desítkové soustavě!

řešení: $(0{,}2)_9 = 2 \cdot 9^{-1} = \dfrac{2}{9} = 0,\overline{2}$

výsledek: $(0{,}2)_9 = 0{,}\overline{2}$.

Příklad 18

zadání: Vyjádřete $(0{,}\overline{2})_5$ v desítkové soustavě!

řešení: $(0{,}\overline{2})_5$ označme symbolem a. Platí:

$a = 2 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^{-2} + \dots$ vynásobme 5

$5 \cdot a = 2 + 2 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^{-2} + \dots$

odečteme-li od druhého řádku první, dostáváme

$5 \cdot a - a = 2$, takže $a = 0{,}5$

výsledek: $(0{,}\overline{2})5 = 0{,}5$.

V předchozích příkladech jsme převedli „číslo periodické“ na „neperiodické“ a naopak. To znamená jediné:

Vlastnost býti periodický není vlastností čísla ale jeho vyjádření v číselné soustavě!

Toto tvrzení spolu s pojetím čísla jako entity, která má různá vyjádření a není svázaná s konkrétní podobou a s tvrzením, že (ne)soudělnost dvou čísel nezávisí na číselné soustavě, mají za cíl proniknout z tohoto článku do myšlenek čtenářů a pokud se to alespoň u někoho podaří, bude mít tento článek smysl.

Příklad 19

zadání: Nalezněte soustavu (alespoň jednu), ve které má číslo $0{,}\overline{7}$ neperiodické vyjádření!

řešení:

$0{,}\overline{7} = \dfrac{7}{9} = 7 \cdot 9^{-1} = (0{,}7)_9$

výsledek: $0{,}\overline{7} = (0{,}7)_9$

Příklad 20

zadání: Nalezněte soustavy (alespoň jednu), ve které má číslo 0,22 periodické vyjádření!

řešení: předpokládejme řešení ve tvaru $a = a_{-1}z^{-1} + a_{-1}z^{-2} + a_{-1}z^{-3} + {} + \dots$

$0{,}22 = a_{-1}z^{-1} + a_{-1}z^{-2} + a_{-1}z^{-3} + \dots \qquad | \cdot z$
$z \cdot 0{,}22 = a_{-1} + a_{-1}z^{-1} + a_{-1}z^{-2} + \dots$
od druhé rovnice odečteme první
$z \cdot 0,22 - 0,22 = a_{-1} \qquad | \cdot 50$
$(z-1) \cdot 11 = a_{-1} \cdot 50$
musí být $a_{-1}, z \in \mathbb{N}$, $a_{-1} < z$
protože $z = \frac{50}{11}a_{-1} + 10$, musí být a_{-1} celočíselným násobkem 11, takže
$a_{-1} = 11 \cdot q, \quad z = 50 \cdot q + 1, \quad q \in \mathbb{N}, \quad q > 1.$
výsledek: Danému předpokladu vyhovují základy 51, 101, 151, ... Zvolme tedy například $q = 1$, takže základ je 51 a perioda je $11 = (B)_5 1$. Shrnuto: $q = 1 > \quad 0,22 = (0,\overline{B})_{51}$.

V předchozím příkladu jsme zvolili předpoklad, že číslo 0,22 má v některé soustavě vyjádření s jednocifernou periodou. Podobný postup bychom mohli provést i pro periodicitu dvou- (či více-) cifernou. Zkráceně by postup vypadal následovně:

Předpokládejme řešení ve tvaru $a = a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-3} + a_{-2}z^{-4} + a_{-1}z^{-5} + \dots$. Pak platí

$$\begin{aligned}
0{,}22 &= a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-3} + a_{-2}z^{-4} + \\
&\qquad + a_{-1}z^{-5} + \dots \\
0{,}22z^2 &= a_{-1}z + a_{-2} + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-3} + \dots \\
0{,}22(z^2 - 1) &= a_{-1}z + a_{-2} \qquad | \cdot 50 \\
0 &= 11z^2 - a_{-1}z - (11 + a_{-2})
\end{aligned}$$

Výsledná rovnice je kvadratická se dvěma parametry, a_{-1} a a_{-2}. Protože tyto parametry i řešení hledáme v $\mathbb{N}$ domnívám se, že tato úloha přesahuje běžný rámec středoškolského učiva. To se týká i rovnic vyšších řádů (pro periody o více cifrách). Proto na tomto místě skončíme s příklady.

Závěr

Domníváte se, že podobné úvahy jsou zajímavé (dočetli jste až sem), ale v praktickém životě nepoužitelné? Nemáte pravdu, tato problematika je důležitá pro výpočty pomocí počítačů (a kalkulaček), kde počet možných uložených desetinných míst je konečný, proto se periodická čísla musí zaokrouhlovat. Jako příklad si zkuste nejprve vypočítat a pak v tabulkovém editoru ověřit příklad:

Příklad 21
zadání: Převeďte číslo 0,1 do soustavy šestkové!
řešení: $0{,}1 \cdot 6 = 0{,}6$, desetinná část je 0,6, celá část je 0
$0{,}6 \cdot 6 = 3{,}6$, desetinná část je 0,6, celá část je 3
protože tuto desetinnou část jsme již měli končíme s výpočtem
výsledek: $0{,}1 = (0{,}0\overline{3})_6$

Provedeme tento výpočet v tabulkovém procesoru. Do buňky A1 vložíme hodnotu 0,1, do buňky B1 vložíme vztah *=6*A1*, do buňky C1 vložíme funkci *=CELÁ.ČÁST(B1)* a do buňky A2 vložíme vztah *=B1-C1*. Zkopírujeme vztahy na další řádky tabulky. Ačkoli by se hodnoty měly stále opakovat, počítač již v políčku B14 zobrazí hodnotu 3,600001 a od dvacátého řádku vypisuje zcela chybné hodnoty!

Problém není v použitém programu (testováno na MS Excel 2002 a MS Excel 2003) ale v zaokrouhlování, které se při počítačových výpočtech provádět musí. Pokud vyjádříte číslo 0,1, které stojí na začátku výpočtu, ve dvojkové soustavě, kterou pro výpočty počítače používají, obdržíte číslo $0{,}\overline{00011}$, tedy číslo periodické. A na takovéto číslo s nekonečným rozvojem máme pouze omezený datový prostor. Proto se ukládá prvních k cifer a ostatní se odstraní. A to je skutečný problém, který již nelze prohlásit za „akademický“.

Několik problémů k zamyšlení

- Nalezněte číslo vyjádřené periodicky, které se v dvojkové (resp. n-kové) soustavě vyjádří neperiodicky!
- Pokud víme, že je číslo ve dvojkové (rep. n-kové) soustavě vyjádřené neperiodicky, ve kterých je jeho vyjádření periodické a ve kterých neperiodické?
- Pokud víme, že je číslo vyjádřeno v trojkové soustavě periodicky, ve kterých soustavách je neperiodické?

- Existuje soustava taková, aby v ní číslo π mělo ukončený rozvoj?
- Lze (takto „jednoduše“) používat soustavy o základu -5, 0,25 nebo π?

Mgr. Jiří Haviger
Fakulta informatiky a managmentu
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové 3

e-mail: jiri.haviger@uhk.cz