Dag Hrubý
Analytická geometrie bez souřadnic

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 1, 9–17

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150636`

ANALYTICKÁ GEOMETRIE BEZ SOUŘADNIC

Dag Hrubý

Cílem příspěvku je upozornit učitele matematiky na zajímavou partii matematiky, jejíž kořeny sahají do první poloviny 19. století, a které se, možná neprávem, vyhýbá současná středoškolská matematika. První kniha s touto tematikou [1] byla vydána v Lipsku roce 1827. Autorem teto knihy je německý matematik a astronom *August Ferdinand Möbius* (1790–1868).

Přímka

Uvažujme, že je dána přímka AB o rovnici $X = A + t(B - A)$. Tuto rovnici můžeme formálně přepsat na tvar $X = (1-t)A + tB$. Označíme-li nyní $\lambda_1 = 1 - t$, $\lambda_2 = t$, potom platí

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B \tag{1}$$

V tomto případě hovoříme o lineární kombinaci bodů A, B. Čísla λ_1, λ_2 jsou libovolná, ale vázána podmínkou

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1. \tag{2}$$

Rovnici (1) nazýváme bodovou rovnicí přímky. Každý bod přímky AB lze psát jako lineární kombinaci bodů A, B a naopak je každou lineární kombinací (1) za podmínky (2) určen právě jeden bod X na přímce AB. Čísla λ_1, λ_2 nazýváme *barycentrické souřadnice* bodů X vzhledem k bodům A, B.

Úsečka

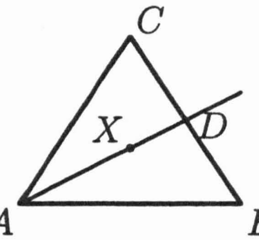
Rovnice $X = A + t(B - A)$ je analytickým vyjádřením úsečky v případě, že $t \in \langle 0; 1 \rangle$. Zřejmě tedy rovnice $X = \lambda_1 A + \lambda_2 B$ vyjadřuje úsečku AB, právě když $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ a $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$.

Trojúhelník

Bod X leží leží v rovině ABC právě tehdy, když existují čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, taková, že platí

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C.$$

Čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nazýváme *barycentrické souřadnice* bodu X vzhledem k bodům A, B, C. Je-li $X \in\leftrightarrow ABC$, potom existuje právě jedna uspořádaná trojice $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ jeho barycentrických souřadnic.



Obrázek 1

Uvažujme nyní tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce a v duchu předcházejících úvah vyjádřeme libovolný bod X trojúhelníku ABC. Polopřímka AX protíná stranu BC v bodě D (viz obr. 1]. Pro bod X zřejmě platí:

$$X = \alpha_1 A + \alpha_2 D,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0.$$

Podobně platí pro bod D:

$$D = \alpha_3 B + \alpha_4 C,\ \alpha_3 + \alpha_4 = 1,\ \alpha_3 \geq 0, \alpha_4 \geq 0.$$

Po dosazení do předcházející rovnice dostáváme

$$X = \alpha_1 A + \alpha_2(\alpha_3 B + \alpha_4 C) = \alpha_1 A + \alpha_2\alpha_3 B + \alpha_2\alpha_4 C.$$

Položíme-li nyní $\alpha_1 = \lambda_1$, $\alpha_2\alpha_3 = \lambda_2$, $\alpha_2\alpha_4 = \lambda_3$, dostáváme

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C.$$

za podmínky

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0.$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že současně platí $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Zřejmě je $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \alpha_1 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) = = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 1 = 1$.

Čtyřstěn

Nyní, již stručněji, můžeme vyjádřit čtyřstěn $ABCD$. Zřejmě pro každý bod X čtyřstěnu $ABCD$ platí:

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D$$

za podmínky $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$, $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0$.

Konvexní množina

Připomeňme si nyní pojem konvexního útvaru. Množinu $M \subset E_n$ nazýváme *konvexní*, jestliže s každými dvěma body A, B, ktere obsahuje, obsahuje i úsečku AB. Užitím zde zavedené symboliky lze psáti:

Množina $M \subset E_n$ je konvexní, platí-li implikace

$$A, B \in M \Longrightarrow \lambda A + (1 - \lambda)B \in M$$

resp.

$$A, B \in M \Longrightarrow \lambda_1 A + \lambda_2 B \in M$$

za podmínky $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ a $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$.

Konvexní mnohostěn

Podobně jako v předcházejích případech lze ukázat, že konvexní mnohostěn o vrcholech $A_1, A_2, ..., A_p$ lze vyjádřit rovnicí $X = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i$ za podmínek $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ a $\lambda_i \geq 0$ pro každé $i \in 1, 2, ..., p$.

Nyní ukážeme, jak lze využít výše uvedených poznatku k řešení některých elementárních úloh.

Střed dvojice bodů

Pro střed S úsečky AB platí $S = A + \frac{1}{2}(B - A)$. Po roznásobení dostáváme $S = A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{A+B}{2}$.

Úloha 1. Určete vrcholy trojúhelníku ABC, jsou-li dány středy A', B', C' jeho stran.
Řešení: Pro středy jednotlivých stran platí

$$A' = \frac{1}{2}(B+C), \qquad B' = \frac{1}{2}(A+C), \qquad C' = \frac{1}{2}(A+B)$$

Nyní již snadno vyjádříme jednotlivé vrcholy

$$\begin{aligned} A &= C' + B' - A' \\ B &= A' + C' - B' \\ C &= B' + A' - C' \end{aligned}$$

Z výše uvedene soustavy plyne např. rovnost $A - B = 2(B' - A')$, kterou lze interpretovat tak, že střední příčky trojúhelníku jsou rovnoběžné se stranami trojúhelníku.

Těžiště trojúhelníku

Pro těžiště T trojúhelníku ABC platí $T - A = \frac{2}{3}(A' - A)$, kde A' je střed strany BC. Pro bod A' platí $A' = \frac{B+C}{2}$. Po dosazení dostáváme $T = A + \frac{2}{3}\left(\frac{B+C}{2} - A\right) = \frac{A+B+C}{3}$. Stejný výsledek bychom obdrželi i v případě, že bychom cyklicky zaměnili vrcholy trojúhelníku ABC. Bod T je tedy společným bodem všech tří těžnic.

Těžiště čtyřstěnu

Ze stereometrie je známo, že těžnice čtyřstěnu se protínají v jednom bodě zvaném těžiště. Toto těžiště dělí každou těžnici v poměru 3 : 1. Připomeňme si, že těžnice čtyřstěnu je úsečka spojující vrchol s těžištěm protější stěny. Je-li dán čtyřstěn $ABCD$, pak pro těžiště jednotlivých stěn čtyřstěnu platí

$$T_A = \frac{B+C+D}{3}, T_B = \frac{A+C+D}{3},$$
$$T_C = \frac{A+B+D}{3}, T_D = \frac{A+B+C}{3}$$

Pro těžiště T např. platí: $T - T_D = \frac{1}{4}(D - T_D)$. Po úpravě dostáváme $T = T_D + \frac{1}{4}(D - T_D) = \frac{1}{4}D + \frac{3}{4}T_D$. Po dosazení za T_D pak mužeme psáti

$$T = \frac{1}{4}D + \frac{3}{4}T_D = \frac{1}{4}D + \frac{3}{4}\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{A+B+C+D}{4}.$$

Podobně jako v předcházejícím případě se bod T nezmění při jakékoliv permutaci vrcholů čtyřstěnu. Bod T je tedy společným bodem všech čtyř těžnic AT_A, BT_B, CT_C, DT_D. V této souvislosti si připomeňme jednu vlastnost těžiště čtyřstěnu.

Těžiště čtyřstěnu je střed každé úsečky, jejímiž krajními body jsou středy dvou protilehlých hran čtyřstěnu.

Toto tvrzení snadno dokážeme. Nechť E je střed hrany AB a F střed hrany CD. Protože E, F jsou středy úseček, můžeme psáti $E = \frac{A+B}{2}$ a podobně $F = \frac{C+D}{2}$. Zřejmě platí

$$\frac{E+F}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2} + \frac{C+D}{2}\right) = \frac{A+B+C+D}{4} = T.$$

Dokázané tvrzení platí zřejmě pro libovolnou dvojici protilehlých hran čtyřstěnu.

Rovnice přímky $X = A + t(B - A), t \in \mathbb{R}$ nepředstavuje jedinou možnost analytického vyjádření přímky. Ukážeme si nyní jiný způsob parametrického vyjádření přímky, kde však paramatr bude mít jiný význam než parametr $t \in \mathbb{R}$ ve výše uvedené rovnici. Je-li dána přímka AB, pak pro její libovolný bod $X \neq B$ platí

$$X - A = \lambda(X - B).$$

Provedeme-li naznačené násobení, dostáváme

$$X = \frac{A - \lambda B}{1 - \lambda} = \frac{1}{1-\lambda}A - \frac{\lambda}{1-\lambda}B.$$

Tento vztah lze rozepsat následovně

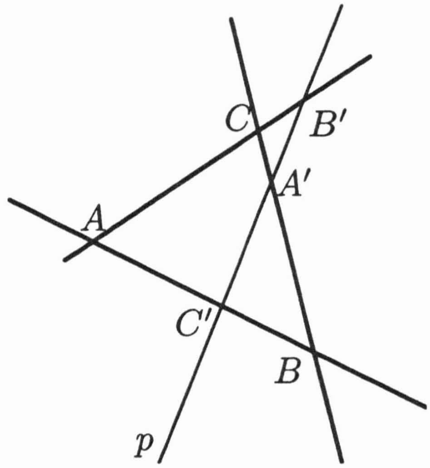
$$X = B + \frac{1}{1-\lambda}(A - B).$$

Tuto rovnici můžeme pokládat za rovnici přímky AB, ze které je vyloučen bod B. Pro parametr λ platí $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1$. Pro $\lambda < 0$

leží bod X uvnitř úsečky AB, pro $\lambda = 0$ je $X = A$ a pro $\lambda > 0$ leží bod X vně úsečky AB. Pro λ platí $|\lambda| = |X - A| : |X - B|$. Zdůrazněme, že vztah $X = \frac{A-\lambda B}{1-\lambda}$ je vztahem mezi čísly, mezi souřadnicemi bodu A, B, X a nikoliv vektorovou rovnici.

Parametr λ se nazývá *dělící poměr* bodu X vzhledem k bodům A, B. Stručně píšeme $\lambda = (ABX)$.

Pomocí dělícího poměru můžeme nyní řešit jiným způsobem některé předcházející úlohy. V případě úsečky AB má její střed S dělící poměr vzhledem k bodům A, B roven $\lambda = -1$. Je tedy $S = \frac{A-\lambda B}{1-\lambda} = \frac{A-(-1)B}{1-(-1)} = \frac{A+B}{2}$. Podobně můžeme postupovat v případě těžiště T trojúhelníku ABC. Pro střed S strany BC platí $S = \frac{B+C}{2}$. Protože těžiště T má vzhledem k bodům A, S dělící poměr $\lambda = -2$, můžeme psáti $T = \frac{A-\lambda S}{1-\lambda} = \frac{A-(-2)\frac{B+C}{2}}{1-(-2)} = = \frac{A+B+C}{3}$.



Obrázek 2

Nechť jsou nyní dány tři navzájem různoběžne přímky AB, BC, AC, tak jak je uvedeno na obr. 2. Přímka p protíná tyto přímky v bodech $C' = p \cap \leftrightarrow AB$, $A' = p \cap \leftrightarrow BC$, $B' = p \cap \leftrightarrow \leftrightarrow AC$. Těmto bodům lze přiřadit dělící poměry $(CBA') = \lambda_A$, $(BAC') = \lambda_2$, $(ACB') = \lambda_3$. Z definice dělícího poměru plynou následující vztahy

$$A' = \frac{C - \lambda_1 B}{1 - \lambda_1} \qquad C' = \frac{B - \lambda_2 A}{1 - \lambda_2} \qquad B' = \frac{A - \lambda_3 C}{1 - \lambda_3}.$$

Podmínka, aby body A', B', C' byly kolineární je $A' = B' + + t(C' - B')$, resp.

$$A' = (1 - t)B' + tC'.$$

Po dosazení dostáváme

$$\frac{C - \lambda_1 B}{1 - \lambda_1} = \frac{1 - t}{1 - \lambda_3}(A - \lambda_3 C) + \frac{t}{1 - \lambda_2}(B - \lambda_2 A).$$

Po vynásobení je

$$\frac{1}{1 - \lambda_1} C - \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1} B =$$
$$= \left(\frac{1 - t}{1 - \lambda_3} - \frac{t\lambda_2}{1 - \lambda_2} \right) A + \frac{t}{1 - \lambda_2} B - \frac{(1 - t)\lambda_3}{1 - \lambda_3} C$$

Nyní využijeme toho, že koeficienty u odpovídajících bodů na obou stranách rovnosti se musí rovnat.

$$\frac{1 - t}{1 - \lambda_3} - \frac{t\lambda_2}{1 - \lambda_2} = 0, \ -\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1} = \frac{t}{1 - \lambda_2}, \ \frac{1}{1 - \lambda_1} = -\frac{(1 - t)\lambda_3}{1 - \lambda_3}.$$

Odtud po úpravě plyne

$$\frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_3} = \frac{t\lambda_2}{1 - t} \qquad \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_2} = -\frac{\lambda_1}{t} \qquad \frac{1 - \lambda_3}{1 - \lambda_1} = -\lambda_3(1 - t).$$

Dále zřejmě platí

$$\frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_3} \cdot \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_2} \cdot \frac{1 - \lambda_3}{1 - \lambda_1} = \frac{t\lambda_2}{1 - t} \cdot \left(-\frac{\lambda_1}{t} \right) \cdot (-\lambda_3(1 - t)).$$

Nakonec dostáváme

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$$

Předcházející úvahy jsou obsahem Menelaovy věty, kterou nyní uvedeme.

Menelaova věta.
Nechť je dán trojúhelník ABC a tři čísla $\lambda_A \neq 1, \lambda_B \neq 1, \lambda_C \neq 1$. Na stranách trojúhelníku ABC sestrojme body A', B', C' tak, že platí $\lambda_A = (CBA')$, $\lambda_B = (ACB')$, $\lambda_C = (BAC')$. Potom platí, že body A', B', C' leží na jedne přímce právě tehdy, jestliže platí $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$.

Výše uvedené výpočty týkající se Menelaovy věty by bylo možné zjednodušit užitím věty, kterou nyní uvedeme.

Věta.
Předpokládejme, že v rovině ABC leží body X, Y, Z, pro které platí

$$\begin{aligned} X &= \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C, & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \\ Y &= \mu_1 A + \mu_2 B + \mu_3 C, & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 &= 1 \\ Z &= \nu_1 A + \nu_2 B + \nu_3 C, & \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 &= 1. \end{aligned}$$

Body X, Y, Z leží na přímce právě tehdy, když

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pomocí této věty dokážeme snadno větu Menelaovu. Z dělících poměrů $\lambda_A = (CBA')$, $\lambda_B = (ACB')$, $\lambda_C = (ABC')$ plyne

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{1-\lambda_A} C - \frac{\lambda_A}{1-\lambda_A} B \\ B' &= \frac{1}{1-\lambda_B} A - \frac{\lambda_B}{1-\lambda_B} C \\ C' &= \frac{1}{1-\lambda_C} A - \frac{\lambda_C}{1-\lambda_C} B \end{aligned}$$

Z předcházející věty plyne, že body A', B', C' leží na jedné přímce právě když

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{1-\lambda_A} & \dfrac{-\lambda_A}{1-\lambda_A} \\ \dfrac{-\lambda_B}{1-\lambda_B} & 0 & \dfrac{1}{1-\lambda_B} \\ \dfrac{1}{1-\lambda_C} & \dfrac{-\lambda_C}{1-\lambda_C} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

tj. právě když platí

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1.$$

Literatura

[1] Möbius, A. F., *Der barycentrische Calcul, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*, Leipzig, 1827.

[2] Budinský, B., *Analytická a diferenciální geoetrie*, SNTL, Praha, 1983.

[3] Kraemer, E., *Analytická geometrie lineárních útvarů*, Praha, 1950.

RNDr. Dag Hrubý
Gymnázium, A. K. Vitáka 452
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz