Milan Hejný
Aritmetické grafy

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 4, 209–217

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150630

ARITMETICKÉ GRAFY

MILAN HEJNÝ

Věnováno prof. Milanovi Komanovi u příležitosti jeho životního jubilea.

Úvod

Článek je psán částečně v jazyce teorie grafů a částečně ve srozumitelnějším jazyce školské matematiky. Výklad zahájíme definicí hlavního pojmu.

Definice 1. Nechť $\mathsf{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{H})$ je graf a $v\colon \mathsf{V} \to \check{\mathsf{C}}$ zobrazení z množiny V všech vrcholů do množiny $\check{\mathsf{C}} \subseteq \mathbb{R}$. (Nejfrekventovanější jsou případy $\check{\mathsf{C}} = \mathbb{N}$, $\check{\mathsf{C}} = \mathbb{Z}$ a $\check{\mathsf{C}} = \mathbb{Q}$.) Dále je dána relace Λ na $\mathbb{N}$ (tj. Λ je podmnožinou kartézského součinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$). Čtveřici $\Gamma = (\mathsf{V}, \mathsf{H}, v, \Lambda)$ nazveme **aritmetický graf s vrcholovým ohodnocením** v **a řídicí relací** Λ.

Řekneme, že graf Γ **je slabý** (přesněji Λ–slabý), když

$$\text{pro všechny } X, Y \in \mathsf{V} \text{ platí: } [X, Y] \in \mathsf{H} \Longrightarrow (v(X), v(Y)) \in \Lambda.$$

Řekneme, že graf Γ **je silný** (přesněji Λ–silný), když

$$\text{pro všechny } X, Y \in \mathsf{V} \text{ platí: } [X, Y] \in \mathsf{H} \Longleftrightarrow (v(X), v(Y)) \in \Lambda.$$

Poznámka. Alternativně lze zavést **aritmetický graf s hranovým ohodnocením** v, kde definičním oborem funkce v je množina H všech hran grafu. Další možné alternace vedou na definice pojmů **aritmetický graf s částečným vrcholovým** (nebo **hranovým**, nebo **vrcholovým i hranovým**) ohodnocením, ve kterém definičním oborem ohodnocující funkce je vlastní podmnožina množiny $\mathsf{V} \cup \mathsf{H}$.

Žáky není rozumné děsit uvedenou definicí. Vhodnější je seznámit je s několika konkrétními případy relace Λ. V tomto článku uvedeme tři typy takových relací:

1. $\Lambda = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; |n-m| = k\}$, kde k je pevně dané kladné přirozené číslo,

2. $\Lambda = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; k-1 < n+m < k+1\}$, kde $k > 2$ je pevně dané přirozené číslo,

3. $\Lambda = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; n,\ m$ jsou čísla soudělná$\}$.

Není těžké popsat další didakticky zajímavé případy relace Λ. Například (uvádíme již pouze podstatnou podmínku):

4. $|n-m| \leq k$

5. $|n-m| > k$

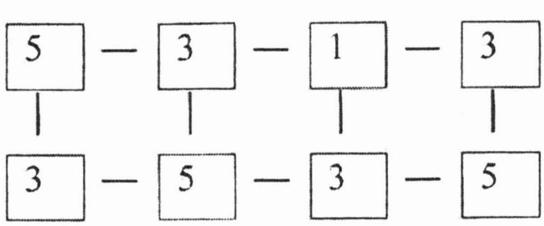
6. $n+m \leq k$

7. n, m jsou nesoudělná.

Další možnosti dostaneme, když uvažujeme o množině $\check{C} = \mathbb{Z}$ nebo $\check{C} = \mathbb{Q}$.

k-rozdílový graf

Je dán graf a v každém jeho vrcholu je umístěno jedno číslo. Přitom je splněna podmínka: jsou-li X a Y vrcholy spojené hranou, pak čísla umístěná v těchto vrcholech se liší o k. Takový graf nazveme k-**rozdílový**. Je zřejmé, že k je přirozené číslo.



Obr. 1

Ilustrace. Na obrázku 1 je 2-rozdílový graf s 8 vrcholy a 10 hranami. Ohodnocení je napsáno přímo v grafu. Každá dvě čísla spojená hranou mají rozdíl 2. Ne každá dvě čísla, která mají rozdíl 2, jsou spojena hranou. Například horní levé číslo 5 a horní pravé číslo 3 mají rozdíl 2, ale nejsou hranou spojena. Kdybychom tuto hranu do grafu z obr. 1 dokreslili, zůstal by stále 2-rozdílový. Kdybychom dokreslili do grafu všech šest hran, které dokreslit můžeme, vznikl by 2-rozdílový graf, kterému budeme říkat silný.

Řekneme, že k-rozdílový graf je **slabý**, když do něj lze dokreslit ještě aspoň jednu hranu. Když již žádnou hranu do grafu dokreslit nelze, řekneme, že je **silný**.

V jazyce definice nahoře můžeme graf z předchozí ilustrace popsat bez obrázku. Aritmetický graf Γ je dán množinou vrcholů $\mathsf{V} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, množinou hran $\mathsf{H} = \{[A, B], [B, C], [C, D], [E, F], [F, G], [G, H], [A, E], [B, F], [C, G], [D, H]\}$, vrcholovým ohodnocením v: $(A, B, C, D, E, F, G, H) \to (5, 3, 1, 3, 3, 5, 3, 5)$ a řídicí relací $\Lambda = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; |n - m| = 2\}$.

Uvedený graf je Λ-slabý, neboť libovolné dva vrcholy, které jsou spojeny hranou, mají číselná ohodnocení lišící se o 2.

Graf není Λ-silný, neboť vrcholy A a D, které mají ohodnocení 5 a 3, nejsou spojeny hranou. Kdybychom do grafu dokreslili 6 hran $[A, D]$, $[A, G]$, $[B, H]$, $[C, E]$, $[D, F]$, $[E, H]$, dostali bychom Λ-silný graf.

Definice 2. Nechť $\Gamma = (\mathsf{V}, \mathsf{H}, v, \Lambda)$ je aritmetický graf s vrcholovým ohodnocením v a řídící relací $\Lambda = \{(n, m) \in \check{\mathsf{C}} \times \check{\mathsf{C}}; |n - m| = k\}$, kde k je dané přirozené číslo. Takový graf nazveme **k-rozdílový**.

Následující úlohy se vztahují ke k-rozdílovým grafům.

Úlohy

1. Je dán Λ-slabý k-rozdílový souvislý graf o $n+1$ vrcholech $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ a n hranách $[A_0, A_1], [A_1, A_2], [A_2, A_3], \dots, \dots, [A_{n-1}, A_n]$. Známe ohodnocení $v(A_0) = a_0$ i číslo k. Jakých hodnot může nabývat číslo $v(A_n) = a_n$?

Totéž ve srozumitelnější dikci: Je dána lomená čára $A_0 A_1 A_2 \dots \dots A_n$ složená z n úseček. V každém vrcholu lomené čáry je umístěno nějaké číslo tak, že rozdíl sousedních čísel je k (například 1, nebo 4, nebo 7 apod.) Takový graf nazveme dále k-rozdílový.

Známe číslo a_0, které je umístěno ve vrcholu A_0. Co můžeme říct o čísle a_n, které je umístěno ve vrcholu A_n?

Komentář. Úlohu řešíme nejprve pro menší hodnoty čísel k a n. Řešením série úloh žák získává vhled do pojmu absolutní hodnota a buduje před-pojem *zbytková třída modulo* $2k$. Například (nulu zde počítáme mezi přirozená čísla):

A. Položíme $k = 1$, $a_0 = 0$ a zvyšujeme n. Žák odhalí, že číslo a_n může nabývat všech sudých/lichých hodnot od 0 po n, jestliže n je číslo sudé/liché.

B. Položíme $k = 2$, $a_0 = 0$ a zvyšujeme n. Tím vedeme žáka k objevu: je-li n sudé, pak a_n je kterékoli z čísel $0, 4, 8, \ldots, 4n$; je-li n liché, pak a_n je kterékoli z čísel $2, 6, 10, \ldots, 4n + 2$.
C_0. Položíme $k = 3$, $a_0 = 0$ a zvyšujeme n. Žáci objeví: je-li n sudé, pak a_n je kterékoli z čísel $0, 6, 12, \ldots, 6n$; je-li n liché, pak a_n je kterékoli z čísel $3, 9, 15, \ldots, 6n + 3$.
C_1. Položíme $k = 3$, $a_0 = 1$ a zvyšujeme n. Žáci objeví: je-li n sudé, pak a_n je kterékoli z čísel $1, 7, 13, \ldots, 6n+1$; je-li n liché, pak a_n je kterékoli z čísel $4, 10, 16, \ldots, 6n + 4$.
C_2. Položíme $k = 3$, $a_0 = 2$ a zvyšujeme n. Žáci objeví: je-li n sudé, pak a_n je kterékoli z čísel $2, 8, 14, \ldots, 6n + 2$; je-li n liché, pak a_n je kterékoli z čísel $5, 11, 17, \ldots, 6n + 5$.
C_3. Jsou-li žáci schopni zobecnit výsledky C_0, C_1 a C_2, najdou tvrzení: Je-li $k = 3$, $a_0 < 3$, pak a_n je kterékoli z přirozených čísel $x \leq 3n + a_0$, pro které platí $x \equiv (a_0 + t) \pmod 6$, kde $t = 0$ pro n sudé a $t = a_0$ pro n liché.

2. Vytvořte Λ-slabý k-rozdílový graf s osmi vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_8$ a osmi hranami $[A_1, A_2], [A_2, A_3], \ldots, [A_7, A_8], [A_8, A_1]$ (tj. osmiúhelník) tak, že v některých pěti vrcholech jsou umístěna čísla 1, 1, 7, 7, 10. Číslo k i čísla ve zbylých třech vrcholech volte sami. Kolik řešení má tato úloha, jestliže předpokládáme, že ve vrcholu A_1 je umístěno číslo 10?

3. Vytvořte Λ-slabý k-rozdílový graf s co nejmenším počtem vrcholů tak, že v osmi jeho vrcholech jsou umístěna čísla $1, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5$. Číslo k volte sami.

4. Vytvořte Λ-slabý 3-rozdílový graf s 9 vrcholy a 12 hranami.

5. Vytvořte Λ-silný 2-rozdílový graf s 8 vrcholy a 12 hranami.

6. Dokažte, že neexistuje Λ-silný k-rozdílový graf, pro který je $\mathsf{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{H})$ dán obrázkem 1.

Jinak: Čísla v 10 vrcholech obrázku 1 nelze změnit tak, aby vznikl k-rozdílový graf, který je Λ-silný.

7. Popište všechny Λ-silné 1-rozdílové grafy, které mají 7 vrcholů a aspoň jeden jejich vrchol má ohodnocení 1 a aspoň jeden má ohodnocení 5.

8. Popište všechny Λ-silné 1-rozdílové grafy, které mají n vrcholů a aspoň jeden jejich vrchol má ohodnocení 1 a aspoň jeden má ohodnocení a) n, b) $n-1$, c) $n-2$, d) $n-3$.

Problém. Zjistěte, zda existuje k_1-rozdílový graf $\mathsf{G}_1 = (\mathsf{V}_1, \mathsf{H}_1)$ s ohodnocením v_1 a k_2-rozdílový graf $\mathsf{G}_2 = (\mathsf{V}_2, \mathsf{H}_2)$ s ohodnocením v_2 tak, že $\mathsf{G}_1 = \mathsf{G}_2$, $v_1(\mathsf{V}_1) = v_2(\mathsf{V}_2)$ a $k_1 < k_2$.
Jinak řečeno: hledáme k_1-rozdílový graf, z něhož pouze přestavěním čísel ve vrcholech dostaneme k_2-rozdílový graf.
Poznámka. Autor zná řešení pouze pro nesouvislý graf.

Komplementární grafy

Definice 3. Nechť $\Gamma = (\mathsf{V}, \mathsf{H}, v, \Lambda)$ je Λ-silný aritmetický graf s vrcholovým ohodnocením v a řídicí relací $\Lambda = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \times \mathbb{N}; k-1 < n+m < k+1\}$, kde $k > 2$ je pevně dané přirozené číslo. Takový graf nazveme k-**komplementární**. Nulu budeme do množiny $\mathbb{N}$ počítat.

Jinak řečeno, vrcholy k-komplementárního grafu spojíme hranou, právě když součet čísel, která jsou v těchto vrcholech umístěna, se od čísla k liší o méně než 2.

Úlohy

9. Vytvořte k-komplementární graf, který má 4 vrcholy a 5 hran.

10. Změňte čísla ve vrcholech grafu z obrázku 1 tak, aby vznikl 10-komplementární graf.

11. Vytvořte 2-komplementární graf, který má 4 vrcholy A, B, C, D a tři hrany $[A, B]$, $[A, C]$, $[A, D]$. Zjistěte, jakých hodnot může nabývat součet všech čtyř čísel, která jsou umístěna ve vrcholech grafu.

12. Stejnou úlohu řešte pro a) 3-komplementární graf, b) 4-komplementární graf, c) 5-komplementární graf

13*. Stejnou úlohu řešte pro k-komplementární graf pro libovolné k.

Úlohy 11–13, z nichž poslední je hodně náročná, vedou žáka k hlubšímu zkoumání ohodnocených grafů. Kromě hledání grafů daných vlastností je zde přítomna i otázka důkazu neexistence některých grafů.

Soudělné grafy

Definice 4. Nechť $\Gamma = (\mathsf{V}, \mathsf{H}, v, \Lambda)$ je Λ-silný aritmetický graf s vrcholovým ohodnocením v a řídicí relací $\Lambda = \{(n, m) \in \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; n, m$ jsou čísla soudělná$\}$ (zde nulu do množiny $\mathbb{N}$ nepočítáme). Takový graf nazveme **soudělný**.

Jinak: Je dán graf a v každém jeho vrcholu je umístěno jedno číslo. Přitom je splněná jediná podmínka: dva vrcholy jsou spojeny hranou, právě když čísla v nich umístěná jsou soudělná. Takový graf nazveme **soudělný**.

Úlohy

14. Jsou dána čísla 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 a 12. Sestrojte pro tuto množinu její graf soudělnosti. (Rozcvička.)

15. Je dán $\mathsf{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{H})$, který byl popsán v úloze 1.1 (lomená čára složená z n úseček). Najděte množinu $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ skládající se z n čísel tak, aby graf G byl jejím grafem soudělnosti. Největší z čísel množiny M označme m. Najděte množinu M tak, aby bylo

a) $n = 3$; $m < 5$; b) $n = 4$; $m < 15$; c) $n = 5$; $m < 20$;
d) $n = 6$; $m < 25$; e) $n = 7$; $m < 40$; f) $n = 8$; $m < 60$.

16. Situace jako v předchozí úloze. Označme navíc součet všech čísel množiny M znakem s. Tedy $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Řešte pro

a) $n = 3$; $s = 8$, b) $n = 3$; $s = 9$, c) $n = 3$; $s = 10$,
d) $n = 4$; $s = 60$, e) $n = 4$; $s = 210$, f) $n = 5$; $s < 120$.

17. Je dán pravidelný n-úhelník. Díváme se na něj jako na graf G s n vrcholy a n hranami. Najděte množinu $\mathsf{M} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ skládající se z n čísel tak, aby graf G byl jejím grafem soudělnosti. Největší z čísel množiny M označme m. Řešte pro

a) $n = 3$; najděte množinu M tak, aby bylo $m < 10$,
b) $n = 4$; najděte množinu M tak, aby bylo $m < 30$,
c) $n = 5$; najděte množinu M tak, aby bylo $m < 40$,
d) $n = 6$; najděte množinu M tak, aby bylo $m < 60$,
e) $n = 7$; najděte množinu M tak, aby bylo $m < 80$,
f) $n = 8$; najděte množinu M tak, aby bylo $m < 100$.

18. Situace jako v předchozí úloze. Označme navíc součet všech čísel množiny M znakem s. Tedy $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Řešte pro

a) $n = 3$, $s = 6$, b) $n = 3$, $s = 8$, c) $n = 3$, $s = 9$,
d) $n = 3$, $s = 21$, e) $n = 4$, $s = 60$, f) $n = 4$, $s = 72$,
g) $n = 5$, $s = 119$, h) $n = 6$, $s = 198$, i) $n = 6$, $s = 357$

Dalších sedm aritmetických grafů

Definice 5. Λ-silný (resp. Λ-slabý) aritmetický graf $\Gamma = (\mathsf{V}, \mathsf{H}, v, \Lambda)$ s vrcholovým ohodnocením v a řídicí relací Λ nazveme

(+)-prvočíselný, právě když $\check{\mathsf{C}} = \mathbb{Z}$ a
$\Lambda = \{(n, m); n + m \text{ je prvočíslo}\}$,

(−)-prvočíselný, právě když $\check{\mathsf{C}} = \mathbb{Z}$ a
$\Lambda = \{(n, m); |n - m| \text{ je prvočíslo}\}$,

(±)-prvočíselný, právě když $\check{\mathsf{C}} = \mathbb{Z}$ a
$\Lambda = \{(n, m); \text{aspoň jedno z čísel } |n + m|, |n - m| \text{ je prvočíslo}\}$,

(±)-ostře prvočíselný, právě když $\check{\mathsf{C}} = \mathbb{Z}$ a
$\Lambda = \{(n, m); |n + m| \text{ i } |n - m| \text{ je prvočíslo}\}$,

desítkový, právě když $\check{C} = \mathbb{Q}$ a
$\Lambda = \{(n, m); n + m$ je dělitelné číslem $10\}$,

čtvercový, právě když $\check{C} = \mathbb{Z}$ a $\Lambda = \{(n, m); n + m$ je čtverec$\}$.

Úlohy

19. Dokažte, že existuje rovinná realizace silného (+)-prvočíselného sčítacího grafu, který má 8 vrcholů a ohodnocení v těchto vrcholech jsou 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8.
[Řešení: Uvnitř pravidelného šestiúhelníka s vrcholy ohodnocenými v pořadí 3, 4, 7, 6, 5, 8 jsou vhodně umístěny vrcholy s ohodnocením 1 a 2.]

20. Dokažte, že neexistuje rovinná realizace silného (+)-prvočíselného sčítacího grafu, který má 9 vrcholů a ohodnocení v těchto vrcholech jsou 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9.

21. Dokažte, že existuje silný (+)-prvočíselný sčítací graf, jehož vrcholy jsou vrcholy šestiúhelníka a hrany jsou strany tohoto šestiúhelníka.
[Příklad řešení: 1, 4, 3, 8, 5, 6]

22. Dokažte, že existuje silný (+)-prvočíselný sčítací graf se třemi vrcholy a třemi hranami.
[Řešení: 1, 1, $p - 1$, kde p je libovolné prvočíslo]

23. Dokažte, že existuje silný (+)-prvočíselný sčítací graf, jehož vrcholy jsou vrcholy osmiúhelníka a hrany jsou strany tohoto osmiúhelníka.
[Příklad řešení: 1, 28, 3, 8, 5, 24, 7, 30]

24. Existuje slabý desítkový sčítací graf, jehož jeden vrchol má ohodnocení 2 a jiný vrchol má ohodnocení 7?

25. Najděte všechny souvislé slabé desítkové sčítací grafy, jejichž každý vrchol má index větvení 2.

26. Je dán nesouvislý graf, který má šest komponent – každá z nich je čtverec. Ohodnoťte všech 24 vrcholů tohoto grafu tak, aby některých 8 vrcholů bylo ohodnoceno čísly 11, 17, 25, 26, 27, 30, 34 a 39 a aby vytvořený ohodnocený aritmetický graf byl silně desítkový (tj. aby součet dvou vrcholů byl dělitelný číslem 10, právě když jsou to čísla jedné hrany).

Závěr

Prof. Koman je autorem velkého počtu originálních úloh a úlohových prostředí, které vedou žáka k experimentování, hledání, formulování hypotéz i k argumentacím, a tak zvyšují jeho intelektuální potenciál. Tento příspěvek přinesl soubor podobných prostředí, v nichž se prolínají myšlenky teorie grafů, rovnic, kombinatoriky, aritmetiky i algebry; vesměs oblastí, k jejichž didaktickému rozpracování prof. Koman výrazně přispěl.

Výše uvedené úlohy naznačují bohaté možnosti tvorby podobných úloh a problémů. Je jasné, že takových prostředí lze vytvořit spousty. Jde však o to, hledat taková z nich, která jsou pro žáky přitažlivá a která přispívají k rozvoji jejich matematického poznání. Právě takovou meta-úlohu je možné dát učitelům, kteří se chtějí dále vzdělávat.

Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.
KMDM UK, M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: milan.hejny@pedf.cuni.cz