Matematická olympiáda

Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 4, 238–253

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150601`

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 22. – 25. 3. 2009 se v Plzni uskutečnilo celostátní kolo 58. ročníku matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C pro školní rok 2009–2010.

Úlohy celostátního kola 58. ročníku matematické olympiády

Plzeň 22. – 25. března 2009

1. Jsou-li všechna čísla p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ prvočísla, je číslo $6p+11$ složené. Dokažte. *(Pavel Novotný)*

Řešení. Předpokládejme, že všechna čísla p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ jsou prvočísla. Zkoumejme, jaký zbytek po dělení pěti může dávat prvočíslo p, tj. pro jaká l z množiny $\{0,1,2,3,4\}$ a nezáporné celé číslo k může platit $p = 5k + l$.

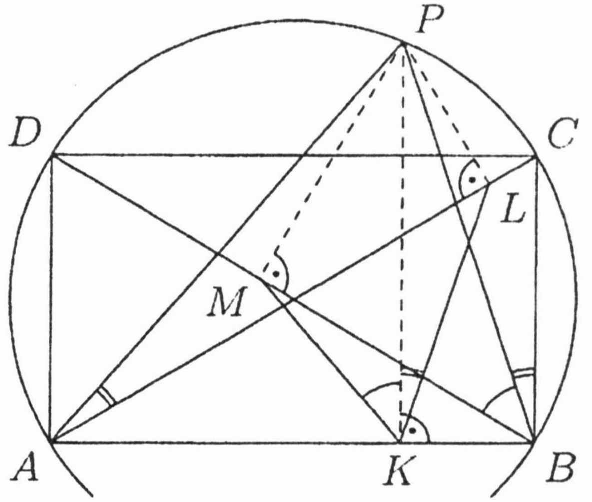
- ▷ Je-li $p = 5k$ prvočíslo, pak $p = 5$, tehdy ovšem $11p + 10 = 65$ není prvočíslo.
- ▷ Je-li $p = 5k + 1$, pak $3p + 2 = 5(3k + 1)$ je prvočíslem jedině pro $k = 0$, tehdy ovšem platí $p = 1$, což není prvočíslo.
- ▷ Je-li $p = 5k + 2$, pak $7p + 6 = 5(7k + 4)$ není prvočíslem pro žádné celé $k \geqq 0$.
- ▷ Je-li $p = 5k + 3$, pak $9p + 8 = 5(9k + 7)$ není prvočíslem pro žádné celé $k \geqq 0$.

Prvočíslo p tedy musí být tvaru $5k + 4$. Pak ovšem $6p + 11 = 5(6k + 7)$ je složené číslo pro každé celé $k \geqq 0$.

Poznámka. Nejmenší prvočíslo p, pro něž jsou i všechna čísla $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ prvočísla, je $p = 2\,099$.

2. Na kratším z oblouků CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P. Paty kolmic z bodu P na přímky AB, AC a BD označme postupně K, L a M. Ukažte, že úhel LKM má velikost $45°$, právě když $ABCD$ je čtverec. *(Tomáš Jurík)*

Řešení. Ukážeme, že úhel LKM má stejnou velikost jako úhel CBD (obr. 1). Odtud dané tvrzení triviálně plyne (úhel CBD má velikost $45°$, právě když $|BC| = |CD|$, tj. když $ABCD$ je čtverec).



Obr. 1

Body B, K, M, P leží v tomto pořadí na Thaletově kružnici nad průměrem BP. Pro velikosti obvodových úhlů nad tětivou PM tedy platí $|\sphericalangle PKM| = |\sphericalangle PBM|$. Podobně body A, K, L, P leží v tomto pořadí na Thaletově kružnici nad průměrem AP a pro velikosti obvodových úhlů nad tětivou PL máme $|\sphericalangle LKP| = |\sphericalangle LAP|$. Z obvodových úhlů nad tětivou CP kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ tak dostáváme $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|$.

Z uvedených rovností vyplývá

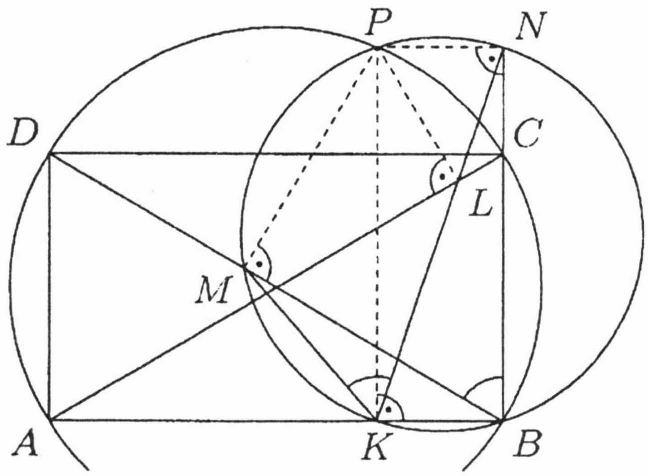
$$\begin{aligned}|\sphericalangle LKM| &= |\sphericalangle LKP| + |\sphericalangle PKM| = |\sphericalangle LAP| + |\sphericalangle PBM| = \\ &= |\sphericalangle CAP| + |\sphericalangle PBD| = |\sphericalangle CBP| + |\sphericalangle PBD| = |\sphericalangle CBD|,\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Uvedený postup se dá použít i v triviálním případě, kdy $P = C$ anebo $P = D$; tehdy mají některé z uvažovaných úhlů nulovou velikost.

Jiné řešení. Opět dokážeme, že úhly LKM a CBD mají stejnou velikost. Označme N patu kolmice z bodu P na přímku BC. Body K, L, N leží na Simsonově přímce příslušející bodu P a trojúhelníku ABC (obr. 2). Na Thaletově kružnici nad průměrem PB leží body K, M i N. Z obvodových úhlů nad tětivou MN téže kružnice tak máme

$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle NKM| = |\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle CBD|.$$



Obr. 2

3. Najděte nejmenší kladné číslo x, pro něž platí: Jsou-li a, b, c, d libovolná kladná čísla, jejichž součin je 1, potom

$$a^x + b^x + c^x + d^x \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

(Pavel Novotný)

Řešení. Nechť a, b, c, d jsou libovolná kladná čísla, jejichž součin se rovná 1. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice čísel a^x, b^x, c^x pro libovolné $x > 0$ máme

$$\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \geqq \sqrt[3]{a^x b^x c^x} = \sqrt[3]{\frac{1}{d^x}}.$$

Volbou $x = 3$ dostáváme nerovnost $\frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3) \geqq 1/d$. Analogicky platí

$$\tfrac{1}{3}(a^3+b^3+d^3) \geqq 1/c, \quad \tfrac{1}{3}(a^3+c^3+d^3) \geqq 1/b, \quad \tfrac{1}{3}(b^3+c^3+d^3) \geqq 1/a.$$

Sečtením uvedených čtyř nerovností dostaneme

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

takže pro $x = 3$ nerovnost ze zadání úlohy vždy platí.

Ukážeme, že $x = 3$ je hledanou nejmenší hodnotou, tedy že pro každé kladné $x < 3$ daná nerovnost pro některou z uvažovaných čtveřic (a, b, c, d) neplatí. Najdeme takovou čtveřici ve tvaru $a = b = c = t$ a $d = 1/t^3$ pro vhodné $t > 1$ (závislé na daném $x < 3$). Pro taková kladná a, b, c, d jistě platí $abcd = 1$,

$$a^x+b^x+c^x+d^x = 3t^x+\frac{1}{t^{3x}} < 4t^x \quad \text{a} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = \frac{3}{t}+t^3 > t^3.$$

Bude-li proto navíc platit $4t^x < t^3$, nebude nerovnost ze zadání úlohy splněna. S ohledem na podmínku $x < 3$ je nerovnost $4t^x < t^3$ ekvivalentní s nerovností

$$t > 4^{\frac{1}{3-x}},$$

která je pro dostatečně velké t skutečně splněna.

Závěr. Hledané nejmenší kladné číslo je $x = 3$.

Poznámka. Požadovanou vlastnost má nejen $x = 3$, ale každé $x \geqq 3$ (a rovněž každé $x \leqq -1$). Vysvětlíme to tak, že jedničky ve jmenovatelích zlomků na pravé straně uvažované nerovnosti zaměníme výrazem $(abcd)^{\frac{x+1}{4}}$; dostaneme tak homogenní nerovnost

$$a^x + b^x + c^x + d^x \geqq a^{\frac{x-3}{4}}(bcd)^{\frac{x+1}{4}} + b^{\frac{x-3}{4}}(acd)^{\frac{x+1}{4}} + \\ + c^{\frac{x-3}{4}}(abd)^{\frac{x+1}{4}} + d^{\frac{x-3}{4}}(abc)^{\frac{x+1}{4}},$$

což je Muirheadova nerovnost pro čtveřice exponentů

$$(x, 0, 0, 0) \quad \text{a} \quad \left(\frac{x+1}{4}, \frac{x+1}{4}, \frac{x+1}{4}, \frac{x-3}{4}\right),$$

jejíž uplatnění je v případě $x > 0$ vázáno jedinou podmínkou $\frac{x-3}{4} \geqq 0$ neboli $x \geqq 3$ (zatímco v případě $x < 0$ vychází jediná podmínka $\frac{x+1}{4} \leqq 0$ neboli $x \leqq -1$).

4. Zkoumejme, pro která přirozená čísla n existují právě čtyři přirozená čísla k taková, že číslo $n + k$ je dělitelem čísla $n + k^2$.

a) Ukažte, že vyhovuje $n = 58$, a najděte příslušná čtyři k.

b) Dokažte, že sudé $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, vyhovuje, právě když p i $2p + 1$ jsou prvočísla.

(Nulu mezi přirozená čísla nepočítáme.) *(Jaromír Šimša)*

Řešení. Z rovnosti $n + k^2 = (k + n)(k - n) + n(n + 1)$ vidíme, že $n+k \mid n+k^2$ platí, právě když $n+k \mid n(n+1)$. Počet čísel k s touto vlastností je tedy rovný počtu těch dělitelů čísla $D = n(n + 1)$, které jsou větší než n.

a) V případě $n = 58$ z rozkladu na prvočinitele příslušného $D = 58 \cdot 59 = 2 \cdot 29 \cdot 59$ vidíme, že dělitelé čísla D, jež jsou větší než 58, jsou právě čtyři: 59, $2 \cdot 59 = 118$, $29 \cdot 59 = 1\,711$ a $2 \cdot 29 \cdot 59 = 3\,422$. To jsou hodnoty $58 + k$, takže příslušná hledaná k jsou o 58 menší, jsou to tudíž postupně čísla $k = 1$, $k = 60$, $k = 1\,653$ a $k = 3\,364 = 58^2$. (Dodejme, že obě čísla $k = 1$ a $k = n^2$ splňují podmínku $n + k \mid n + k^2$ pro každé n.)

b) Pro sudé $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, platí $D = 2p(2p + 1)$, takže snadno vypíšeme čtyři dělitele čísla D, které jsou větší než dané

$n = 2p$:

$$2p + 1 < 2(2p + 1) < p(2p + 1) < 2p(2p + 1). \tag{1}$$

Jsou-li obě čísla p, $2p + 1$ prvočísla, žádné jiné takové dělitele číslo D zřejmě nemá, tudíž číslo $n = 2p$ má požadovanou vlastnost.

Je-li naopak aspoň jedno z čísel p, $2p + 1$ složené a platí-li předpoklad $p \geqq 3$ ze zadání úlohy, ukážeme, že příslušné D pak má kromě dělitelů vypsaných v (1) ještě aspoň jednoho dalšího dělitele většího než $2p$. Rozlišíme přitom dva případy podle toho, které z čísel p, $2p + 1$ je složené.

(i) Je-li složené číslo p, je toto číslo dělitelné některým q, $2 \leqq q \leqq \frac{1}{2}p$, a číslo D má pak dělitele $2q(2p + 1)$, který s výjimkou případu $q = \frac{1}{2}p$ leží mezi druhým a třetím dělitelem vypsaným v (1):

$$2(2p + 1) < 2q(2p + 1) < p(2p + 1).$$

Nemá-li však číslo p jiného netriviálního dělitele kromě $q = \frac{1}{2}p$, platí nutně $p = 4$. Tehdy ani druhé číslo $2p + 1 = 9$ není prvočíslo, takže pátého dělitele čísla D (většího než $2p$) najdeme v části (ii).

(ii) Je-li složené (liché) číslo $2p + 1$, je toto číslo dělitelné některým q, $3 \leqq q < p$, a číslo D má pak dělitele $2pq$, který leží mezi druhým a třetím dělitelem vypsaným v (1):

$$2(2p + 1) < 2pq < p(2p + 1), \quad \text{neboť} \quad q > 2 + \frac{1}{p} \quad \text{a} \quad q < p + \frac{1}{2}.$$

Ekvivalence z části b) úlohy je tak dokázána.

Jiné řešení části b). Označme $D = 2p(2p + 1)$. Protože $2p < \sqrt{D} < 2p + 1$, má D právě čtyři dělitele větší než $2p$, právě když má zároveň právě čtyři dělitele menší než $\sqrt{D}$, celkem tedy právě osm dělitelů. Číslo D má aspoň dva prvočinitele, takže je buď součinem tří různých prvočísel (to zřejmě nastane, právě když p a $2p + 1$ jsou prvočísla), nebo tvaru $q^3 r$, kde q, r jsou různá prvočísla. Druhý případ však nemůže nastat, protože $D = 2p(2p + 1)$ je sudé, má lichého dělitele $2p + 1$ a ještě dělitele p nesoudělného s $2p + 1$, muselo by proto být $p = 2^2$, odkud $r = 2p + 1 = 9$, což ovšem není prvočíslo. Tím je požadovaná ekvivalence v části b) dokázána.

5. V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku $A_1A_2\dots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \leqq k \leqq n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k, $1 \leqq k \leqq n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n+1-k$ mincí.

(Radek Horenský)

Řešení. Přiřaďme každé minci index i vrcholu A_i, na kterém leží (tedy číslo z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$) a po každém přemístění dvojice mincí čísla přiřazená mincím aktualizujme. Sledujme nejprve, jak se změní součet S všech n čísel přiřazených jednotlivým mincím po jednom přemístění.

Nepřemisťujeme-li žádnou z obou mincí mezi vrcholy A_1 a A_n, součet S se nezmění, protože jedno z čísel mincí se o 1 zmenší, druhé se o 1 zvětší (a ostatní se nezmění). Stejně tak se součet S zřejmě nezmění, přemístíme-li jednu minci z A_1 do A_n a současně druhou z A_n do A_1. Přemístíme-li jednu minci z A_1 do A_n a druhou z A_i do A_{i+1} (kde $1 \leqq i \leqq n-1$), součet S vzroste o $(n-1)+1 = n$. Konečně přemístíme-li jednu minci z A_n do A_1 a druhou z A_i do A_{i-1} (kde $2 \leqq i \leqq n$), součet S klesne o n. Z uvedeného úplného rozboru plyne, že *zbytek součtu S po dělení číslem n se nikdy nezmění.*

Součet S ve výchozí pozici má hodnotu

$$1\cdot 1 + 2\cdot 2 + \dots + n\cdot n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

zatímco v kýžené cílové pozici by měl mít hodnotu

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(využili jsme známé vzorce pro součet prvých a druhých mocnin čísel prvních n přirozených čísel). Aby bylo možné zamýšleného cíle dosáhnout, musí dvě určené hodnoty S dávat po dělení číslem n stejný zbytek, neboli jejich rozdíl $\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)$ musí být násobkem čísla n. Číslo $\frac{1}{6}(n+1)(n-1) = \frac{1}{6}(n^2-1)$ proto musí být celé. Dosazením všech jednotlivých zbytků 0 až 5 modulo 6 snadno zjistíme, že nalezená podmínka je splněna, právě když číslo n dává po dělení šesti zbytek 1 nebo 5. V další části řešení ukážeme, že pro všechna taková n lze skutečně kýžené cílové pozice dosáhnout.

Popíšeme jeden z možných postupů. (Jedinou) minci, která je na počátku ve vrcholu A_1, označme M. Všechny mince s výjimkou M budeme neustále přemisťovat ve stejném společném směru. V opačném směru se tedy bude přemísťovat jediná mince M, aniž bychom se o její pozici nějak průběžně „starali". Její konečnou polohu určíme pomocí dříve odvozené vlastnosti součtu S: index i vrcholu A_i, ve kterém se mince M nakonec ocitne, je jednoznačně určen tím, že konečná hodnota součtu S dává po dělení číslem n stejný zbytek jako hodnota výchozí — indexy všech vrcholů totiž tvoří úplnou soustavu zbytků modulo n.

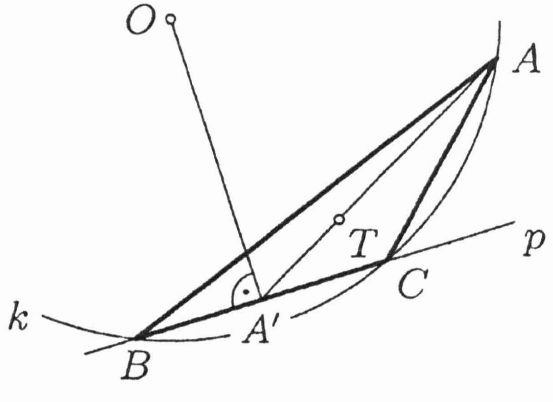
Navrženým postupem permanentního přemisťování mince M můžeme kteroukoliv ze zbylých mincí (nezávisle na ostatních zbylých mincích) přemístit do libovolného vrcholu, který si zamaneme. Po konečném počtu vhodných přemístění tedy zřejmě dosáhneme toho, aby všechny mince různé od M byly v každém vrcholu A_i s indexem $i > 1$ v počtu, jaký nám předepisuje zadání úkolu, tedy $n+1-i$. Je celkem lhostejno, že je to právě $n+1-i$, důležité však je, že celkové počty mincí ve výchozí pozici i kýžené cílové pozici jsou zřejmě stejné, takže po zmíněném „zajištění" vrcholů $A_2, A_3, \ldots, A_n$ mincemi různými od M bude zbylých $n-1$ mincí různých od M ve vrcholu A_1 a poslední mince M se ocitne v některém, prozatím nezjištěném vrcholu. Kdy to bude vrchol A_1, a tudíž cíle bude dosaženo? Právě tehdy, když počet vrcholů n bude takový, že součet S pro výchozí pozici dává při dělení n stejný zbytek jako součet pro cílovou pozici, o kterou přemisťováním usilujeme. A všechna taková n jsme již našli.

Odpověď. Požadovaného cíle je možné dosáhnout, právě když číslo n dává po dělení šesti zbytek 1 nebo 5.
Poznámka. Popsaný způsob řešení vede k následujícímu závěru: Jsou-li dána dvě rozmístění stejného počtu mincí ve vrcholech n-úhelníku, pak jedno z nich lze převést na druhé popsaným přemisťováním mincí, právě když oba součty S, které odpovídají těmto rozmístěním, dávají po dělení číslem n stejný zbytek.

6. V rovině ω jsou dány dva různé body O a T. Najděte množinu vrcholů všech trojúhelníků, které leží v rovině ω a mají těžiště v bodě T a střed opsané kružnice v bodě O. *(Jaromír Šimša)*

Řešení. Vezměme nějaký bod A z roviny ω. Aby mohl být vrcholem trojúhelníku popsaného v zadání, musí být různý od bodů O a T. Nejprve popíšeme obecnou konstrukci trojúhelníku ABC, v němž jsou dány vrchol A, střed O opsané kružnice a těžiště T (pro trojici navzájem různých bodů A, O, T). Teprve pak zjistíme, pro které body A takový trojúhelník sestrojit nelze.

Označme A' střed strany BC. Bod A' je obrazem bodu A ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Pokud $A' \neq O$, leží body B a C na kolmici p vedené bodem A' k přímce OA' a zároveň na opsané kružnici k se středem O a poloměrem $|OA|$ (obr. 3).

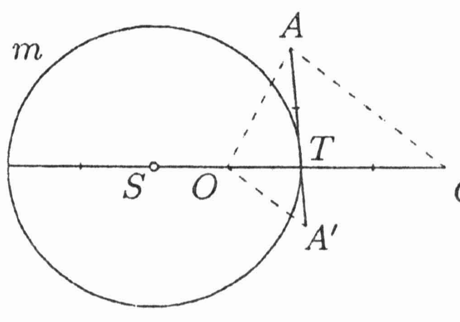


Obr. 3

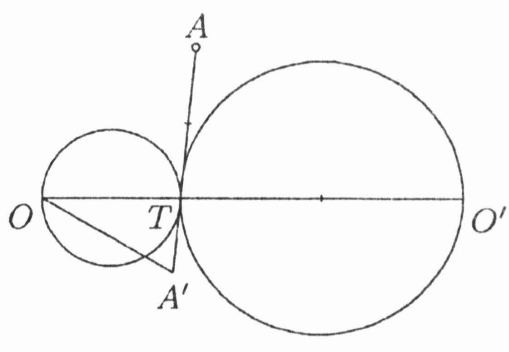
K danému bodu A dokážeme vždy sestrojit jeho obraz A'

v uvedené stejnolehlosti. Předpokládejme nejprve, že $A' \neq O$. Abychom dostali dva různé body B a C, musí být přímka p sečnou kružnice k. To nastane, právě když $|OA'| < |OA|$. Označme O' obraz bodu O ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2. Platí $|O'A| = 2|OA'|$, proto konstrukční podmínku můžeme zapsat ve tvaru $|O'A| < 2|OA|$. Bod A proto musí ležet mimo kruh určený Apollóniovou kružnicí[1] $m(S; |ST|)$, kde S je bod souměrně sdružený s bodem T podle bodu O (obr. 4).

Pokud tedy $A' \neq O$ neboli $A \neq O'$, dostaneme konstrukcí tři body A, B, C. Ty budou vrcholy vyhovujícího trojúhelníku, pokud neleží v přímce. Na přímce leží, když je přímka BC totožná s přímkou AT, tj. když přímka OA' je kolmá na AT. Bod A' proto nesmí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem OT a (po „zobrazení" této podmínky ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2) bod A nesmí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem $O'T$ (obr. 5).



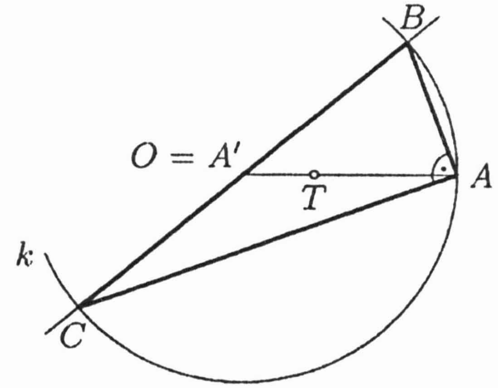
Obr. 4



Obr. 5

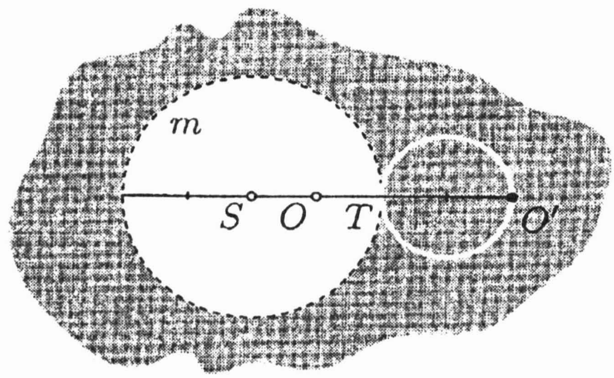
V případě, že bod A je totožný s bodem O', tj. $A' = O$, namísto kolmice p můžeme vzít libovolnou přímku (různou od AT) procházející bodem O (obr. 6). Dostaneme tak nekonečně mnoho různých trojúhelníků ABC s pravým úhlem při vrcholu A, které splňují všechny podmínky zadání.

[1] Pro dané dva různé body P, Q a kladné číslo $k \neq 1$ je Apollóniova kružnice množina bodů X, pro něž platí $|PX| = k|QX|$. Střed Apollóniovy kružnice leží na přímce PQ stejně jako dva body kružnice, které dovedeme pro dané k jednoduše sestrojit.



Obr. 6

Závěr. Hledanou množinou bodů je vnější oblast kružnice m kromě bodů ležících na Thaletově kružnici nad průměrem $O'T$, přičemž bod O' do hledané množiny též patří (obr. 7).



Obr. 7

Výsledková listina celostátního kola 58. ročníku MO kategorie A

Vítězové:

1.–2.	Miroslav Klimoš	4/4 GMK Bílovec	**39**
	Josef Tkadlec	8/8 GJK Praha 6, Parléřova	**39**
3.–4.	Samuel Říha	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**35**
	Tomáš Zeman	6/8 GJK Praha 6, Parléřova	**39**
5.–6.	David Klaška	3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**28**
	Jan Matějka	8/8 G České Budějovice, Jírovcova	**28**
7.–8.	Josef Ondřej	7/8 G Rožnov pod Radhoštěm	**26**
	Hana Šormová	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**26**
9.	Miroslav Olšák	7/8 GB Praha 5	**20**
10.	Jan Vaňhara	8/8 GLJ Holešov, Palackého	**19**
11.	Hana Bílková	8/8 G Frenštát pod Radhoštěm	**18**

Další úspěšní řešitelé:

12.–13.	Van Minh Nguyen	6/6 G Tachov, Pionýrská	**17**
	Bohuslav Zmek	3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**17**
14.	Jana Faltýnková	8/8 CMG Prostějov	**16**
15.–20.	Petr Boroš	3/4 GMK Bílovec	**15**
	Simona Domesová	7/8 GMK Bílovec	**15**
	Vít Musil	4/4 G Šumperk, Masarykovo nám.	**15**
	Nguyen Van Nhan	8/8 G Praha 6, Nad Alejí	**15**
	Tomáš Pavlík	8/8 GJK Praha 6, Parléřova	**15**
	Petr Ryšavý	7/8 GJH Praha, Mezi Školami	**15**
21.–22.	Radek Marciňa	3/4 G Praha 5, Zborovská	**14**
	Alexander Slávik	8/8 G Brno, Terezy Novákové	**14**
23.–25.	Duc Trung Ha	7/8 MG Plzeň, Petákova	**13**
	Zuzana Komárková	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**13**
	Lucie Mohelníková	4/4 GMK Bílovec	**13**

ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 2009–2010

Kategorie A

A-I-1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y} &= z - 1,\\ \sqrt{y^2 - z} &= x - 1,\\ \sqrt{z^2 - x} &= y - 1.\end{aligned}$$

(Radek Horenský)

A-I-2. Kosočtverci $ABCD$ je vepsána kružnice. Uvažujme její libovolnou tečnu protínající obě strany BC, CD a označme po řadě R, S její průsečíky s přímkami AB, AD. Dokažte, že hodnota součinu $|BR| \cdot |DS|$ na volbě tečny nezávisí. *(Leo Boček)*

A-I-3. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 33$. V jednom kroku zvolíme na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je dělitelem druhého, obě smažeme a na tabuli napíšeme jejich (celočíselný) podíl. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen čísla, z nichž žádné není dělitelem jiného. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je číslem 1.) Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat? *(Peter Novotný)*

A-I-4. V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O, V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S, právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost $60°$. *(Tomáš Jurík)*

A-I-5. V kádi je r_0 ryb, společný úlovek n rybářů. Přicházejí pro svůj díl jednotlivě, každý si myslí, že se dostavil jako první, a aby si vzal přesně n-tinu aktuálního počtu ryb v kádi, musí předtím jednu z ryb pustit zpět do moře. Určete nejmenší možné číslo r_0 v závislosti na daném $n \geqq 2$, když i poslední rybář si aspoň jednu rybu odnese. *(Dag Hrubý)*

A-I-6. Pro dané prvočíslo p určete počet (všech) uspořádaných trojic (a, b, c) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2p^2\}$, které splňují vztah

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot c,$$

kde $[x, y]$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y.

(Tomáš Jurík)

KATEGORIE B

B-I-1. Na stole leží tři hromádky zápalek: v jedné 2 009, ve druhé 2 010 a v poslední 2 011. Hráč, který je na tahu, zvolí dvě hromádky a z každé z nich odebere po jedné zápalce. Ve hře se pravidelně střídají dva hráči. Hra končí, jakmile některá hromádka zmizí. Vyhrává ten hráč, který udělal poslední tah. Popište strategii jednoho z hráčů, která mu zajistí výhru.

(Ján Mazák)

B-I-2. Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo, které má přesně šest kladných dělitelů, z nichž právě dva jsou jednomístní a právě dva dvojmístní. Větší z dvojmístných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla. Určete všechna čísla, která mohou být na tabuli napsána. *(Peter Novotný)*

B-I-3. V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, pro jehož středy stran AB, CD, DA označené po řadě K, L, M platí: body A, B, L, D leží na jedné kružnici a rovněž body K, L, D, M leží na jedné kružnici. *(Jaroslav Švrček)*

B-I-4. Najděte 2 009 po sobě jdoucích čtyřmístných čísel, jejichž součet je součinem tří po sobě jdoucích přirozených čísel.

(Radek Horenský)

B-I-5. Uvnitř kratšího oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je zvolen bod D. Tětiva CD protíná stranu AB v bodě E. Dokažte, že trojúhelník se stranami délek $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný trojúhelníku ABD.

(Pavel Leischner)

B-I-6. Reálná čísla a, b mají tuto vlastnost: rovnice $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokažte nerovnost $b > 3$.

b) Pomocí b vyjádřete kořeny obou rovnic.

(Jaromír Šimša)

KATEGORIE C

C-I-1. Erika a Klárka hrály hru „slovní logik“ s těmito pravidly: Hráč A si myslí slovo složené z pěti různých písmen. Hráč B vysloví libovolné slovo složené z pěti různých písmen a hráč A mu prozradí, kolik písmen uhodl na správné pozici a kolik na nesprávné. Písmena považujeme za různá, i když se liší jen háčkem nebo čárkou (například písmena A, Á jsou různá). Kdyby si hráč A myslel například slovo LOĎKA a B by vyslovil slovo KOLÁČ, odpoví hráč A, že jedno písmeno uhodl hráč B na správné pozici a dvě na nesprávné. Zkráceně sdělí „$1 + 2$“, neboť se opravdu obě slova shodují pouze v písmenu O včetně pozice (druhé zleva) a v písmenech K a L, jejichž pozice jsou odlišné. Erika si myslela slovo z pěti různých písmen a Klárka vyslovila slova KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA a ZÁPAL. Erika na tato slova v daném pořadí odpověděla $0+3$, $0+2$, $1+2$, $2+0$ a $1+2$. Zjistěte, jaké slovo si Erika mohla myslet. *(Peter Novotný)*

C-I-2. Vrcholem C pravoúhelníku $ABCD$ veďte přímky p a q, které mají s daným pravoúhelníkem společný pouze bod C, přičemž přímka p má od bodu A největší možnou vzdálenost a přímka q vymezuje s přímkami AB, AD trojúhelník co nejmenšího obsahu.

(Leo Boček)

C-I-3. Určete všechna reálná čísla x, která vyhovují rovnici $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$. (Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než číslo x, tzv. dolní celou část reálného čísla x.)

(Jaroslav Švrček)

C-I-4. Kružnice $k(S; r)$ se dotýká přímky AB v bodě A. Kružnice $l(T; s)$ se dotýká přímky AB v bodě B a protíná kružnici k v krajních bodech C, D jejího průměru. Vyjádřete délku a úsečky AB pomocí poloměrů r, s. Dokažte dále, že průsečík M přímek CD, AB je středem úsečky AB. *(Leo Boček)*

C-I-5. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost.

(Ján Mazák)

C-I-6. Najděte všechna přirozená čísla, která nejsou dělitelná deseti a která ve svém dekadickém zápisu mají někde vedle sebe dvě nuly, po jejichž vyškrtnutí se původní číslo 89krát zmenší.

(Jaromír Šimša)