Milada Kočandrlová; Jana Vecková
Objem klence

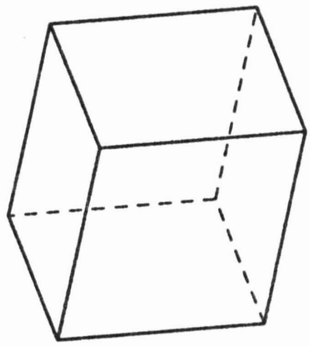
Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 4, 193–200

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150596

OBJEM KLENCE

Milada Kočandrlová, Jana Vecková

Kalcit $CaCO_3$, uhličitan vápenatý, patří k nejrozšířenějším minerálům v zemské kůře. Dokonale se štěpí podle stěn klence (romboedru), obr. 1. Vyniká krystalizací z magmatu nebo hydrotermických roztoků.



Obr. 1: Klenec

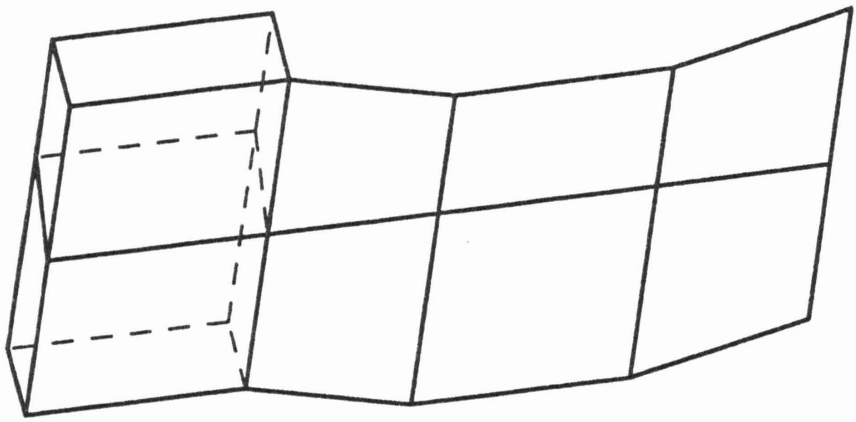
Klenec je mnohostěn ze skupiny rovnoběžnostěnů, jehož všech šest stěn jsou shodné kosočtverce. Proto dříve než určíme vzorec pro výpočet jeho objemu, uvedeme některé vlastnosti rovnoběžnostěnů.

Vlastnosti rovnoběžnostěnů

Rovnoběžnostěn je mnohostěn (šestistěn), jehož protější stěny jsou rovnoběžníky. Kolmý rovnoběžnostěn je kolmý čtyřboký hranol, speciálně krychle.

1. Řezy rovinami kolmými na boční hrany rovnoběžnostěnu mají minimální obvod i obsah. Každé dva řezy rovnoběžnostěnu, souměrné podle roviny kolmého řezu, jsou shodné.

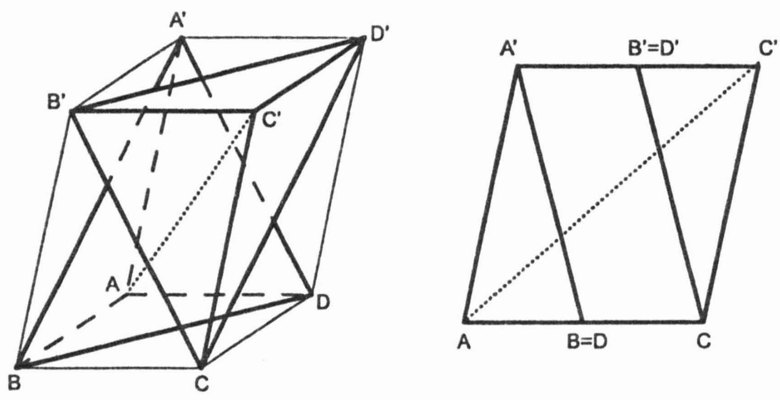
   Tyto vlastnosti jsou zřejmé z rozvinutého pláště rovnoběžnostěnu, obr. 2.



Obr. 2: Plášť rovnoběžnostěnu s kolmým řezem

2. V rovnoběžnostěnu $ABCDA'B'C'D'$ zvolíme protější vrcholy A, C'. Roviny $A'BD$, $B'CD'$, určené stěnovými úhlopříčkami, jsou navzájem rovnoběžné a dělí zvolenou úhlopříčku AC' na tři shodné úsečky.

   Vlastnost je zřejmá z úhlopříčného řezu $ACC'A'$ rovnoběžnostěnu, obr. 3.



Obr. 3: Úhlopříčné řezy rovnoběžnostěnu

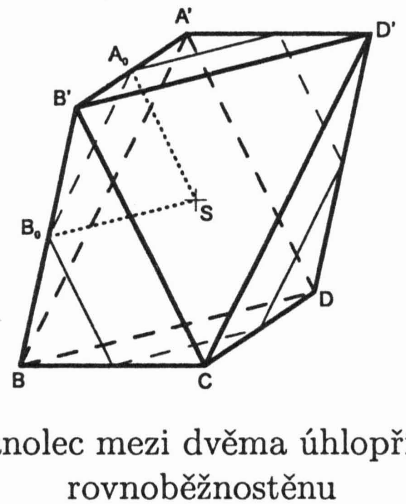
3. Rovnoběžnostěn $ABCDA'B'C'D'$ lze rozložit na dva čtyřstěny $A'BDA$, $B'CD'C'$ a hranolec (prizmatoid) $A'BDB'CD'$, obr. 3. V případě rovnoběžnostěnu má hranolec trojúhelníkové podstavy $A'BD$ a $B'CD'$. Šest jeho stěn

jsou rovnoramenné trojúhelníky, které mají jednu stranu na jedné podstavě a protější vrchol na druhé podstavě (obr. 4), je to nepravidelný osmistěn.

Abychom určili objem hranolce, sestrojme jeho řez rovinou, která půlí boční hrany, viz. vlastnost 4. Uvnitř tohoto řezu zvolíme libovolný bod, např. střed S. Potom hranolec můžeme rozložit na dva jehlany s vrcholem S a podstavami v podstavách hranolce. Bod S je také vrcholem jehlanů s podstavami v bočních stěnách hranolce. Např. jehlany $A'BB'S$ a $A_0B_0B'S$ mají stejnou výšku. Přitom pro obsahy jejich podstav platí $S(A'BB') = 4S(A_0B_0B')$. U jehlanu $A_0B_0B'S$ uvažme podstavu A_0B_0S, pak jeho výška je polovina výšky hranolce. Podstavy všech šesti jehlanů vyplní celý střední šestiúhelníkový řez. Potom pro objem hranolce platí

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{v}{2}S_d + \frac{v}{2}S_h + 4\frac{v}{2}S_s\right) = \frac{v}{6}(S_d + S_h + 4S_s),$$

kde S_d, S_h, S_s jsou obsahy dolní, horní podstavy a středního řezu hranolce.

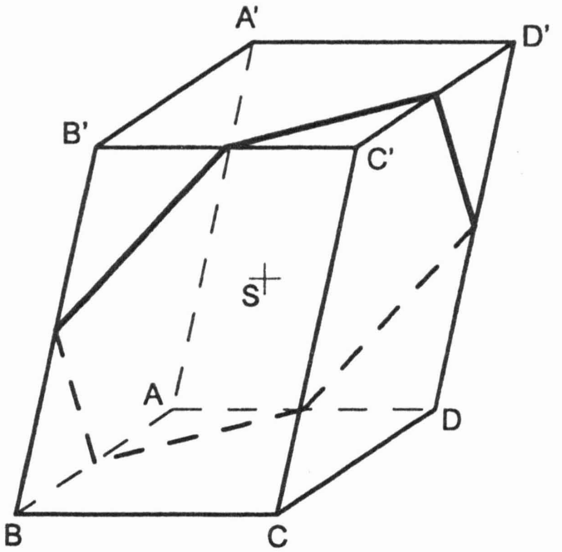


Obr. 4: Hranolec mezi dvěma úhlopříčnými řezy rovnoběžnostěnu

4. Rovina ϱ, procházející středy těch hran, které nevycházejí z vrcholů zvolené tělesové úhlopříčky, protíná rovnoběžnostěn v šestiúhelníku. Střed S rovnoběžnostěnu je středem

šestiúhelníku. Všechny řezy rovnoběžnostěnu rovinami rovnoběžnými s rovinou ϱ mají stejný obvod.

Ze sítě klence je i tato vlastnost zřejmá, obr. 5.



Obr. 5: Šestiúhelníkový řez rovnoběžnostěnu a síť klence

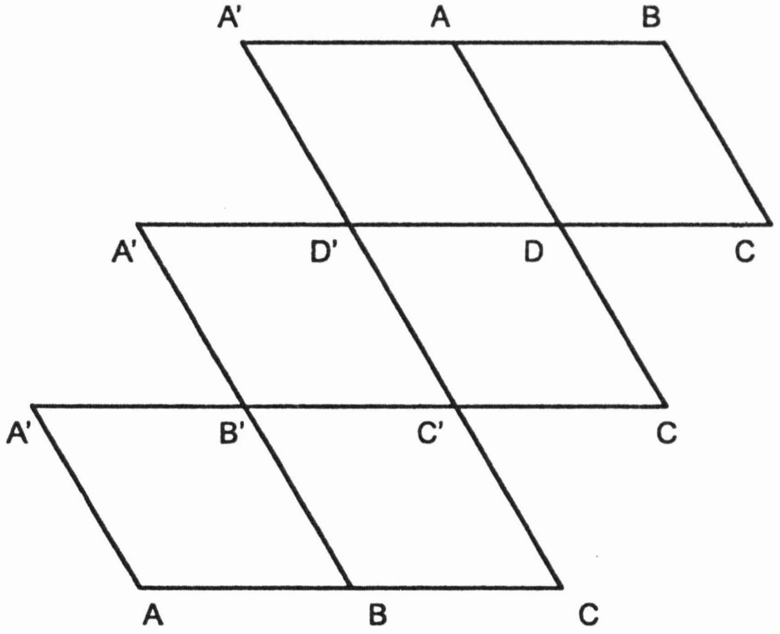
Klenec

Vše co jsme řekli o rovnoběžnostěnu platí pro klenec, tj. rovnoběžnostěn s kosočtvercovými stěnami. Na obr. 5 je síť klence zploštělého. Zploštělý klenec má u dvou protějších vrcholů (vrcholy A', C) tři tupé hranové úhly β takové, že $3\beta < 360°$, tj. $\beta < 120°$, pak ostrý úhel $\alpha < 60°$. To jsou zřejmě podmínky pro existenci zploštělého klence.

Na obrázku 6 je síť protáhlého klence. U dvou protějších vrcholů (vrcholy A', C) jsou tři ostré úhly α. Zřejmě pro každý ostrý úhel α existuje protáhlý klenec.

Objem klence

Známe-li hranu a a stěnovou úhlopříčku e klence, vypočítáme jeho objem.



Obr. 6: Úhlopříčné řezy rovnoběžnostěnu

Podle vlastnosti 3 můžeme objem klence vypočítat jako součet objemů dvou shodných čtyřstěnů a objemu hranolce.

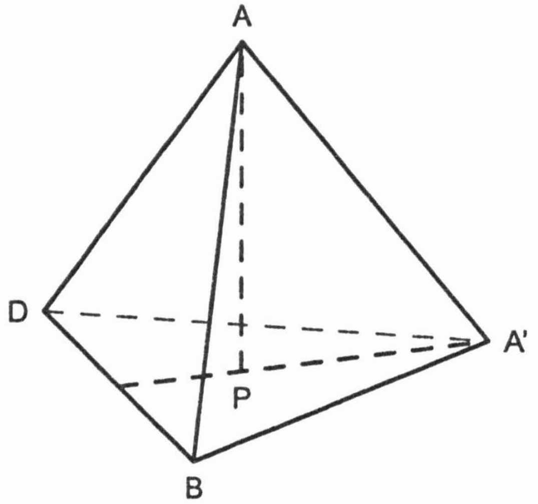
Čtyřstěn $A'BDA$ má jednu stěnu $A'BD$ rovnostranný trojúhelník o straně e a tři stěny rovnoramenné trojúhelníky o základně e a ramenech a. Jeho výška na stěnu $A'BD$ je podle vlastnosti 2 rovna třetině délky úhlopříčky AC' klence. Výšku čtyřstěnu vypočítáme z pravoúhlého tojúhelníku APA' (obr. 7) s přeponou $|AA'| = a$ a odvěsnou $|A'P| = e\sqrt{3}/3$, tj.

$$v_4 = \sqrt{\frac{3a^2 - e^2}{3}}.$$

Potom objem čtyřstěnu $A'BDA$ i čtyřstěnu $B'CC'D'$ je

$$V_1 = \frac{e^2\sqrt{3}}{12} v_4.$$

Hranolec, obr. 4, má za podstavy rovnostranné tojúhelníky $A'BD$ a $B'CD'$ o straně e a šest stěn z rovnoramenných trojúhelníků s rameny a. Ve vzorci pro objem hranolce je $S_d = S_h =$



Obr. 7: Výška v jehlanu

$= e^2\sqrt{3}/4$ jsou obsahy podstav s S_s je obsah pravidelného šestiúhelníka o straně $e/2$ (vlastnost 4, jeho strany jsou střední příčky trojúhelníků stěn). Obsah šestiúhelníka je

$$S_\varrho = \frac{3\sqrt{3}e^2}{8}.$$

Potom objem hranolce je

$$V_2 = \frac{v_4}{6}(2S_d + 4S_s) = \frac{\sqrt{3}e^2}{3}v_4.$$

Objem klence je

$$V = 2V_1 + V_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^2 v_4 = \frac{1}{2}e^2\sqrt{3a^2 - e^2}.$$

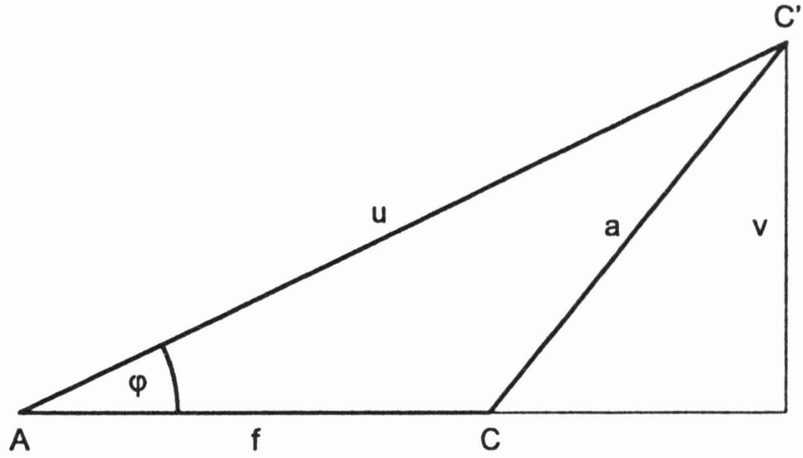
Jsou-li dány obě stěnové úhlopříčky $f > e$, je objem klence

$$V = \frac{1}{4}e^2\sqrt{3f^2 - e^2}.$$

Odchylka stěnové úhlopříčky a výška klence

Z úhlopříčného řezu $ACC'A'$ klence, obr. 8, vypočítáme odchylku φ úhlopříčky

$$u = |AC'| = 3v_4 = \sqrt{3(3a^2 - e^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{3(3f^2 - e^2)}.$$



Obr. 8: Úhlopříčný řez klence

Z kosinové věty v trojúhelníku ACC' je

$$\cos\varphi = \frac{u^2 + f^2 - a^2}{2uf} = \frac{\sqrt{3f^2 - e^2}}{f\sqrt{3}}.$$

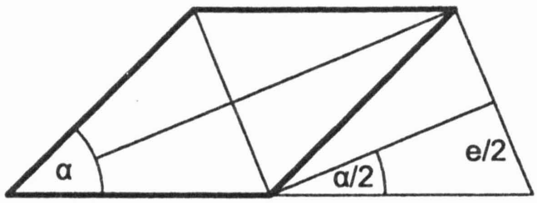
Potom $\sin\varphi = e/(f\sqrt{3})$. Pomocí odchylky φ vypočítáme výšku klence

$$v = u\sin\varphi = \frac{e\sqrt{3f^2 - e^2}}{2f}.$$

Druhý vzorec pro objem klence

Je-li klenec dán hranou a a ostrým úhlem α kosočtverce, pro úhle α platí, obr. 9,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{e}{2a}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{f}{2a}.$$



Obr. 9: Stěna klence

Dále ze vzorců pro poloviční úhel funkce sinus dostaneme

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2a^2 - e^2}{2a^2} = \frac{f^2 - e^2}{f^2 + e^2},$$

kde jsme použili vzorec $4a^2 = e^2 + f^2$. Nyní můžeme vypočítat výšku klence pomocí úhlu α

$$v = \frac{a(1 - \cos\alpha)\sqrt{1 + 2\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Obsah kosočtverce je $S = a^2 \sin\alpha$. Potom pro objem klence dostáváme vzorec

$$V = a^3(1 - \cos\alpha)\sqrt{1 + 2\cos\alpha}.$$

Literatura

[1] Strnad, A., *Geometrie pro vyšší školy reálné*, Nakladatelství F. Kytka knihkupec, Praha, 1912.

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Mgr. Jana Vecková
ČVUT Fakulta stavební
katedra matematiky
Thákurova 7
160 00 Praha 6
e-mail: milada.kocandrlova@fs.cvut.cz
e-mail: veckova@fsv.cvut.cz