Milada Kočandrlová; Jana Vecková
Tři nepravidelné mnohostěny

Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 3, 158–164

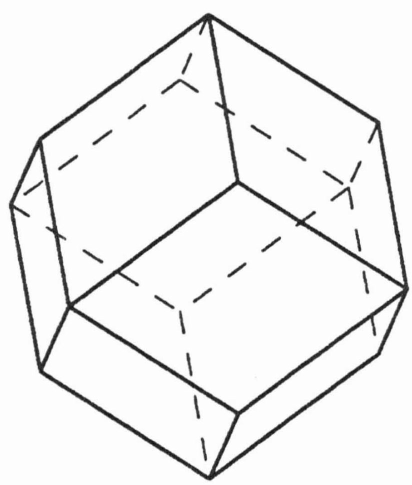
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150587`

TŘI NEPRAVIDELNÉ MNOHOSTĚNY

MILADA KOČANDRLOVÁ, JANA VECKOVÁ

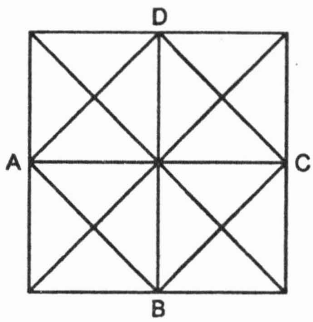
Sfalerit ZnS (sulfid zinečnatý) je krychlový minerál. Vzniká na hydrotermálních rudných žilách. Jeho jednoduchý krystalový tvar je rombický dodekaedr – dvanáctistěn kosočtverečný. Ten je také např. tvarem granátu. Jak takový dodekaedr (obr. 1) vypadá, jak jej sestrojíme a jaké má vlastnosti si popíšeme v následujících řádcích.

Dvanáctistěn kosočtverečný



Obr. 1. Dvanáctistěn kosočtverečný.

Nad každou stěnou pravidelného osmistěnu $ABCDEF$ sestrojíme pravidelný trojboký jehlan. Takto bychom dostali dvacetičtyřstěn. Přidáním podmínky, že spojnice hlavních vrcholů dvou sousedních jehlanů protíná jejich společnou hranu, dostaneme dvanáctistěn kosočtverečný. Společná hrana a spojnice hlavních vrcholů jehlanů určují úhlopříčky kosočtverce. Kolmý průmět osmistěnu $ABCDEF$ a takto sestrojeného dvanáctistěnu do roviny úhlopříčného řezu $ABCD$ jsou tudíž dva čtverce, obr. 2.



Obr. 2. Kolmý průmět osmistěnu a dvanáctistěnu.

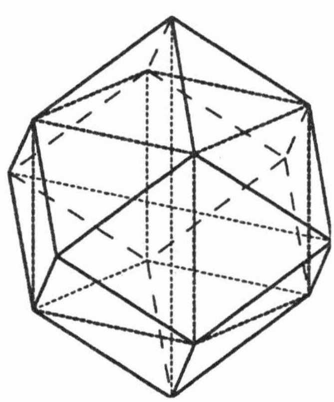
Je-li úhlopříčka osmistěnu a, je jeho hrana, která je jednou úhlopříčkou kosočtverce, $h_8 = f = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Druhá úhlopříčka kosočtverce je $e = \frac{a}{2}$. Potom strana kosočtverce, tj. hrana sestrojeného jehlanu, je $h_{12} = a\frac{\sqrt{3}}{4}$. Nyní můžeme vypočítat výšku v sestrojeného jehlanu při výšce podstavy $v_s = a\frac{\sqrt{6}}{4}$, tj. $v = a\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Objem sestrojeného pravidelného trojbokého jehlanu s podstavnou hranou $h_8 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ a výškou v je $V_3 = \frac{a^3}{96}$. Objem osmistěnu je $V_8 = \frac{a^3}{6}$. Potom objem dvanáctistěnu je

$$V_{12} = V_8 + 8V_3 = \frac{a^3}{4}.$$

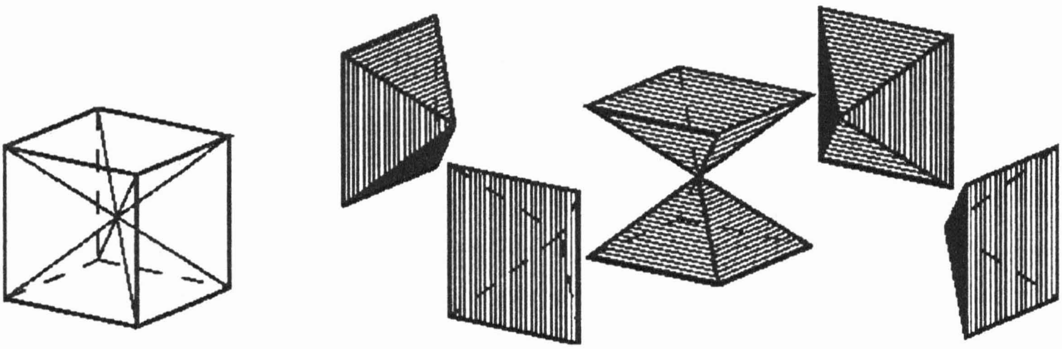
Objem dvanáctistěnu kosočtverečného je čtvrtinou objemu krychle, která je dvanáctistěnu opsaná. Tato krychle má středy stěn ve vrcholech základního osmistěnu.

Do dvanáctistěnu kosočtverečného vepíšeme krychli tak, že její hrany jsou kratší úhlopříčky e kosočtvercových stěn, tj. hrana krychle je $\frac{a}{2}$, obr. 3.



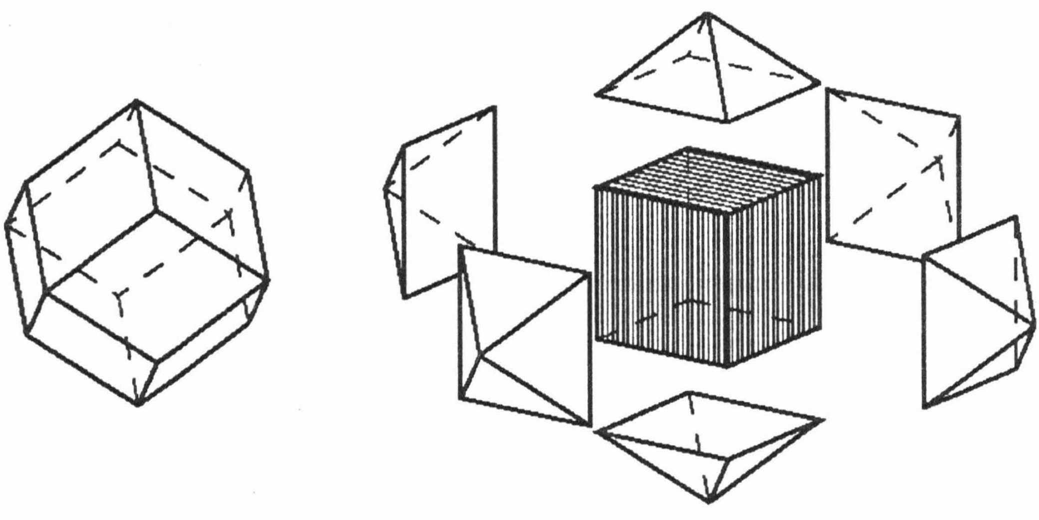
Obr. 3. Krychle dvanáctistěnu vepsaná.

Z obr. 3 je zřejmé, že dvanáctistěn kosočtverečný jsme mohli sestrojit také tak, že nad každou stěnou dané krychle sestrojíme pravidelný čtyřboký jehlan. Přitom spojnice hlavních vrcholů dvou sousedních jehlanů protíná jejich společnou hranu. Hrana krychle je $e = \frac{a}{2}$, potom výška sestrojených jehlanů je $\frac{a}{4}$. Tudíž odchylka boční stěny jehlanu od stěny krychle je 45°.



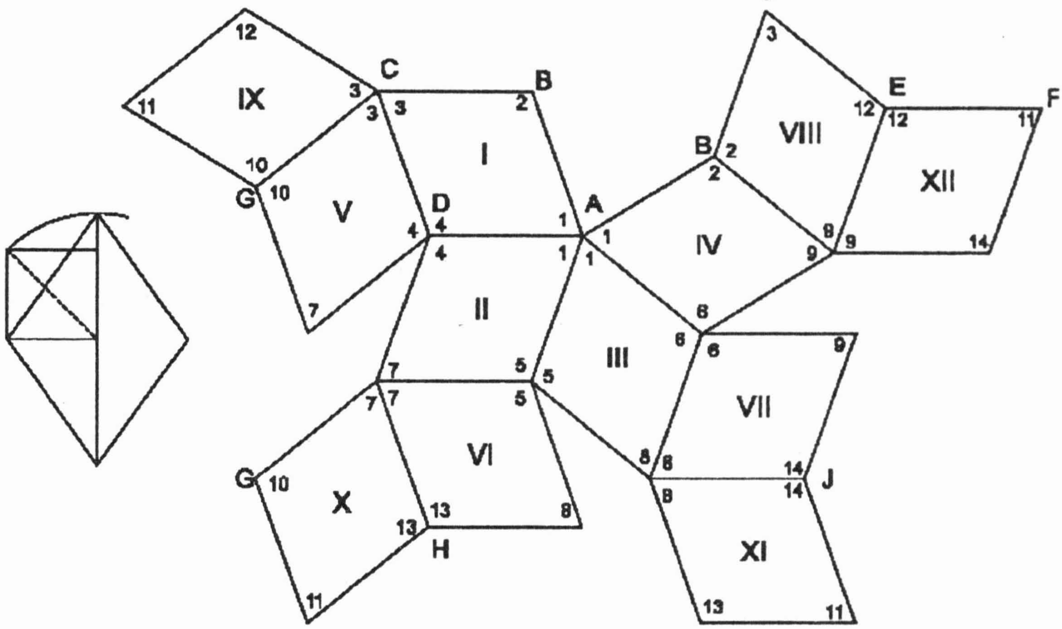
Obr. 4. Rozklad krychle na jehlany.

Dvanáctistěn kosočtverečný můžeme vytvořit tak, že krychli rozdělíme stěnovými úhlopříčkami na šest pravidelných čtyřbokých jehlanů, obr. 4. Tyto jehlany následně přilepíme na shodnou krychli, obr. 5. Dvanáctistěn kosočtverečný je tak sjednocením dvou krychlí.



Obr. 5. Dvanáctistěn jako sjednocení dvou krychlí.

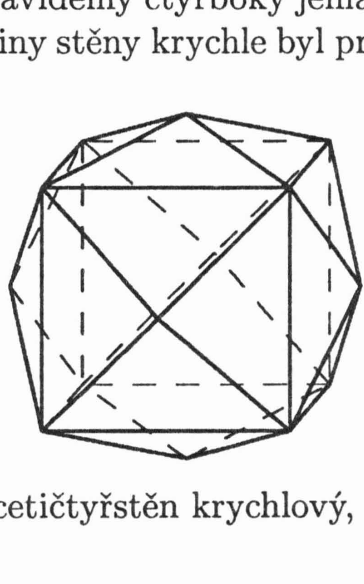
Síť dvanáctistěnu kosočtverečného je na obr. 6. Pro úhlopříčky kosočtverců je $e : f = 1 : \sqrt{2}$.



Obr. 6. Síť dvanáctistěnu kosočtverečného, konstrukce kosočtverce.

Dvacetičtyřstěn krychlový, tetrahexaedr

Druhým mnohostěnem, který také souvisí s krychlí, je dvacetičtyřstěn krychlový, tetrahexaedr. V krystalografii do tvarů tetrahexaedru dorůstá např. fluorit (kazivec CaF_2). Nad každou stěnou krychle sestrojíme pravidelný čtyřboký jehlan obr. 7 tak, aby jeho kolmý průmět do roviny stěny krychle byl pravidelný osmiúhelník, obr. 8.

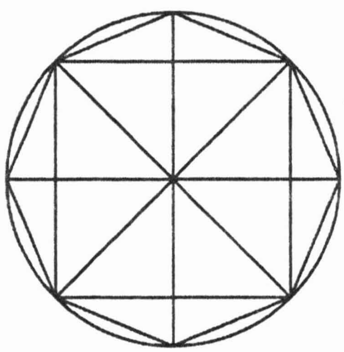


Obr. 7. Dvacetičtyřstěn krychlový, tetrahexaedr.

Kružnice opsaná pravidelnému osmiúhelníku má osu v ose krychle, která je i osou tetrahexaedru. Průměr této kružnice označíme a. Potom hrana krychle má délku $h_k = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, obr. 8. Výška jehlanu je $v = \frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a}{4}(2 - \sqrt{2})$. Objem jehlanu potom je $V_j = \frac{a^3}{24}(2 - \sqrt{2})$. Objem krychle je $V_k = a^3\frac{\sqrt{2}}{4}$. Objem celého tetrahexaedru je

$$V = V_k + 6V_j = \frac{a^3}{2}.$$

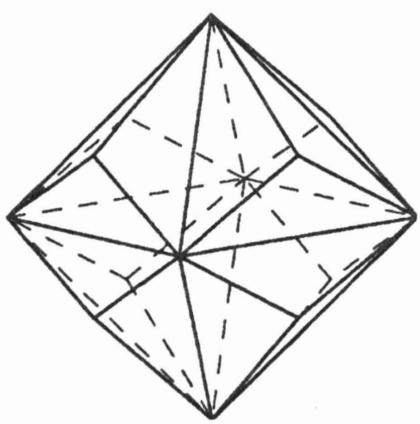
Objem tetrahexaedru je polovinou objemu krychle o hraně a jemu opsané.



Obr. 8. Kolmý průmět krychle a tetrahexaedru.

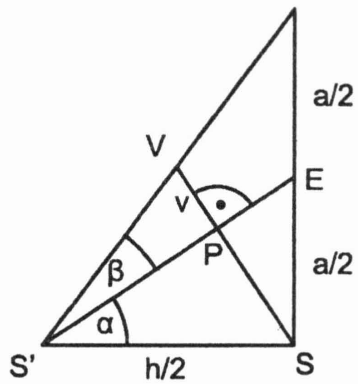
Dvacetičtyřstěn oktaedrický, trioktaedr

Třetím mnohostěnem je čtyřiadvacetistěn oktaedrický, trioktaedr. Sestrojíme ho ze základního osmistěnu tak, že nad každou jeho stěnou sestrojíme pravidelný trojboký jehlan, obr. 9.



Obr. 9. Dvacetičtyřstěn oktaedrický.

Jehlan určíme tak, aby jeho prodloužená stěna protínala úhlopříčku osmistěnu délky a ve vzdálenosti a od jeho středu. Hrana osmistěnu je $h = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Abychom určili výšku jehlanů, zvolíme osou osmistěnu rovinu kolmou k jeho hraně, obr. 10.



Obr. 10. Část osového řezu osmistěnu a trioktaedru.

Z obrázku je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{h} = \sqrt{2}$ a dále

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{2a}{h} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{a + h\cdot\operatorname{tg}\beta}{h - a\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Pak $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Z podobných trojúhelníků SSE, SPS, kde stěnová výška osmistěnu je $|SE| = a\frac{\sqrt{6}}{4}$, platí $|SE| : \frac{h}{2} = \frac{h}{2} : |SP|$. Odtud $|SP| = a\frac{\sqrt{6}}{12}$ a výška jehlanu je

$$v = |SP|\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{a\sqrt{3}}{30}.$$

Objem jehlanu je $V_j = \frac{a^3}{240}$. Potom objem trioktaedru je

$$V = \frac{a^3}{6} + 8\frac{a^3}{240} = \frac{a^3}{5}.$$

Objem trioktaedru je pětinou objemu krychle jemu opsané.

Označíme $V_6 = a^3$ objem krychle, $V_4 = \frac{a^3}{3}$ objem čtyřstěnu, $V_8 = \frac{a^3}{6}$ objem osmistěnu, $V_{12} = \frac{a^3}{4}$ objem dvanáctistěnu, $V_{246} = \frac{a^3}{2}$ objem tetrahexaedru a $V_{248} = \frac{a^3}{5}$ objem trioktaedru všechny do krychle vepsané, je zřejmě

$$V_6 : V_{246} : V_4 : V_{12} : V_{248} : V_8 = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}.$$

Literatura

[1] Strnad, A., *Geometrie pro vyšší školy reálné. Díl II. Dokončení planimetrie. Stereometrie*, F. Kytka, Praha, 1912.

[1] Holzmüller, G., *Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1904.

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
ČVUT Fakulta stavební
katedra matematiky
Thákurova 7
160 00 Praha 6
e-mail: milada.kocandrlova@fs.cvut.cz

Mgr. Jana Vecková
ČVUT Fakulta stavební
katedra matematiky
Thákurova 7
160 00 Praha 6
e-mail: veckova@fsv.cvut.cz